Corrigé du DM 26

Série de fonctions

Partie A - Calcul de $\zeta(2)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les applications $u : t \mapsto \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{n}\sin(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, par intégration par parties on a :

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t \\ v'(t) = \cos(nt) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u'(t) = \frac{t}{\pi} - 1 \\ v(t) = \dfrac{1}{n}\sin(nt) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= 0 - 0 - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

A nouveau, les applications $t \mapsto \frac{t}{\pi} - 1$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{n^2}\cos(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\mathrm{d}t &= \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\left(-\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right)\mathrm{d}t \\ &= 0 - (-1)\left(-\frac{1}{n^2\pi}\right) + \frac{1}{n^2}\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3\pi}\left[\sin(nt)\right]_0^\pi = -\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$

2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,\pi]$, alors $e^{it} \neq 1$ et la formule d'Euler donne :

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}}e^{it} = e^{it}\frac{e^{i\frac{mt}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}}\frac{e^{-i\frac{mt}{2}} - e^{i\frac{mt}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} = e^{it\left(1 + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right)}\frac{2\sin\left(-i\frac{mt}{2}\right)}{2\sin\left(-i\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{tm}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}e^{i\frac{(m+1)t}{2}}$$

De plus, identifiant la somme des termes d'une suite géométrique, on a

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^m e^{nt}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{tm}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}e^{i\frac{(m+1)t}{2}}\right) = \frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{tm}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Ainsi, $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ t \in]0,\pi] \quad \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$

3. Soit u et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)u(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)u'(t)\mathrm{d}t \\ \left|\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| &\overset{\text{Inégalité triangulaire}}{\leq} \left|\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda\pi)u'(\pi)\right| + \left|\frac{1}{\lambda}u'(0)\right| + \left|\int_0^\pi -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)u'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\overset{\text{Croissance de l'intégrale}}{\leq} \frac{1}{|\lambda|}\left(|u'(\pi)| + |u'(0)|\int_0^\pi |u'(t)|\mathrm{d}t\right) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Par encadrement $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi} u(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

4. • Étude sur $]0,\pi]$: les applications $t \mapsto 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et $2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ ne s'annule pas. Par quotient, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.
• Étude en 0 : travaillons à établir un $DL_1(0)$

$$f(t) \underset{0}{=} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\frac{t}{2} + o(t^2)} \underset{0}{=} \frac{\frac{t}{2\pi} - 1}{1 + o(t)} \underset{0}{=} -1 + \frac{t}{2\pi} + o(t)$$

Comme f admet un $DL_1(0)$ et $f(0) = -1$ alors f est continue et dérivable en 0.
Ainsi, d'après le théorème de prolongement des applications de classe $\mathcal{C}^1$ on a que $\boxed{f \in \mathcal{C}^1([0,\pi])}$.

5. a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, d'après 1) on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{m} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{d'après 2)} \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{or } \cos a \sin b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right) \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t - \frac{t^2}{2\pi}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} t - \frac{t^2}{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi, $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t}$.

b) D'après 4) $f \in \mathcal{C}^2([0\pi])$; donc d'après 3)

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

Enfin, $\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{1}{n^2} \text{ converge et } \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

Partie B - Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

6. a) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{1}{(n+x)(n+y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$$

Comme les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ sont des séries de Riemann convergentes ($2 > 1$ et $3 > 1$), par comparaison de série à termes
les séries $\sum \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et $\sum \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}_+ \text{ les séries } \sum \frac{1}{(n+x)(n+y)} \text{ et } \sum \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \text{ convergent.}}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{(n+x)(n+0)}$$

D'après 1a), la série $\sum \frac{1}{(n+x)(n+0)}$ converge (cas où $y = 0$).

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \text{ la série } \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \text{ converge.}}$

7. • $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+0}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$

• $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$ (téléscopie)

Ainsi, $\boxed{S(0) = 0 \text{ et } S(1) = 1.}$

8. a) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
S(y) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \quad \text{(op sur des séries convergentes)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+y)-(n+x)}{(n+x)(n+y)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y-x}{(n+x)(n+y)} = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.}$

b) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+x)(n+y) \geq n^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Par sommation sur $n \in [\![1, N]\!]$ avec $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

Les séries étant convergentes, par passage à la limite, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Donc $|S(y) - S(x)| = |y-x| \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}}_{\geq 0} \leq |y-x| \frac{\pi^2}{6}$.

Ainsi, $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad |S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x|.}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, comme $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{\pi^2}{6}|y-x| = 0$ alors par encadrement $\lim\limits_{y\to x} S(y)-S(x) = 0$ ou encore $\lim\limits_{y\to x} S(y) = S(x)$: c'est la définition de la continuité de S en x.
Ainsi, $\boxed{S \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+).}$

Autre approche : f est $\dfrac{\pi^2}{6}$-lipschitzienne et donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

9. a) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x \neq y$. D'après 3a), il vient

$$\frac{S(y)-S(x)}{y-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$$

D'après 1a), (cas où $y = x$) la série $\sum \dfrac{1}{(n+x)^2}$. Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+x)-(n+y)}{(n+x)^2(n+y)} \\
&= (x-y)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \\
\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| &\leq |x-y|\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}}_{\geq 0} \\
&\leq_{(\star)} |x-y|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}
\end{aligned}$$

L'inégalité $(\star)$ résulte du fait que

$$\forall n \geq 1,\ (n+x)^2(n+y) \geq n^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq \frac{1}{n^3}$$

puis, considérant les sommes partielles, par sommation d'inégalité et par passage à la limite, on obtient la majoration donnée.

Ainsi, $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \text{ avec } x \neq y, \quad \left|\dfrac{S(y)-S(x)}{y-x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| \leq |x-y|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\ .}$

b) Comme $\lim\limits_{y\to x} |x-y|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = 0$, par encadrement, il vient :

$$\lim_{y\to x} |x-y|\frac{S(y)-S(x)}{y-x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2} \in \mathbb{R}$$

Ceci est la définition de la dérivabilité de S en x.

Ainsi, $\boxed{S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.}$

c) • $S'(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

• $S'(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \underbrace{1}_{k=1}$ (changement d'indice $\boxed{k = n+1}$)

Ainsi, $\boxed{S'(0) = \dfrac{\pi^2}{6} \text{ et } S'(1) = \dfrac{\pi^2}{6} - 1.}$