DM 29

à rendre le vendredi 14 juin 2024

Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. a) Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve ?

b) Pour j élément de $[\![1, n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)$-ème tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)$-ème tirage ?

On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au k-ième tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

2. a) Calculer $\mathbf{P}(X_1 = 1)$, $\mathbf{P}(X_2 = 1)$.

b) Pour tout entier naturel j de $[\![1, n-1]\!]$, calculer $\mathbf{P}(X_{2j+1} = 1)$ et $\mathbf{P}(X_{2j} = 1)$.

c) En déduire la loi suivie par toutes les variables X_k.

3. Pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, on note U_j l'événement "On obtient la boule noire pour la première fois au $(2j-1)$-ème tirage".

a) En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)$-ième tirage, montrer que $\mathbf{P}(U_n) = 0$.

Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$.

b) Exprimer l'événement $(X = 1)$ en fonction des U_j, puis en déduire la valeur de $\mathbf{P}(X = 1)$.

c) Montrer que $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{1}{n!}$.

4. Montrer que $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} X_k$, puis en déduire l'espérance de X.

5. Soit i un entier naturel compris entre 0 et $n-2$.

a) Pour tout j de $[\![1, 2n-2i-2]\!]$, donner la valeur de $\mathbf{P}(X_{2i+j+1} = 1 | X_{2i+1} = 1)$.

b) En déduire que $\forall j \in [\![1, 2n-2i-2]\!],\ \mathbf{Cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = \dfrac{-1}{n^2}$.

6. Soit i un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.

a) Montrer que, pour tout k de $\in [\![1, n-i-1]\!]$, $\mathbf{P}(X_{2i+2k} = 1 | X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.

b) Montrer que, pour tout k de $[\![0, n-i-1]\!]$, $\mathbf{P}(X_{2i+2k+1} = 1 | X_{2i} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.

c) En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-1]\!],\ \mathbf{Cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) = \dfrac{i}{n^2(n-i)}$.

7. Montrer que la variance de X est : $V(X) = \dfrac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{j}$.