DM 0 Révisions : Filtrage et résolution numérique d'équation différentielle

Exercice 1 Simulation de l'action d'un filtre

On s'intéresse à l'action d'un filtre passe-bas d'ordre 1 de gain statique $H_0 = 1$ et de fréquence de coupure $f_c = 1000\,\text{Hz}$.

Pour rappel, la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 est donnée par :

$$\underline{H}(f) = \frac{H_0}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{f}{f_c}$$

1 Diagramme de Bode

On cherche dans un premier temps à appliquer ce filtre sur un signal sinusoïdal pur :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

1. Écrire une fonction python `sinusoide(t, f, E0)` permettant de générer une sinusoïde (cosinus) d'amplitude `E0` à la fréquence `f` associés aux instants contenus dans le tableau `t` (de type `array`).
Astuce : utiliser la fonction `array` de la bibliothèque `numpy` .

2. Écrire une fonction `transfert(H0, x)` renvoyant la fonction de transfert du filtre.
Remarque : le nombre imaginaire pur i s'écrit `1j` sous Python.

3. On considère un signal d'entrée sinusoïdal $e = E_0 \cos(\omega t)$. Quelle est l'expression du signal $s(t)$ filtré par un filtre de fréquence de transfert $\underline{H}$? Écrire une fonction `fitrage_sinusoide(H, E0, f)` calculant cela.

4. Écrire un programme qui trace sur un même graphique un signal d'entrée réel $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et le signal réel filtré $s(t)$. On prendra comme paramètres : $E_0 = 1$, $f = 1000\,\text{Hz}$, $H_0 = 1$ et $f_c = 1000\,\text{Hz}$.

5. Faire varier les paramètres du signal d'entrée et vérifier qualitativement la nature du filtre.

2 Action du filtre sur un signal créneau

La décomposition en série de Fourier d'un signal créneau de fréquence f et d'amplitude 1 est donnée par :

$$e(t) = e_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_n = \frac{4}{(2n+1)\pi} \\ \omega_n = (2n+1) \times 2\pi f \\ \varphi_n = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

6. Écrire une fonction `creneau(t, f, N)` permettant de générer un signal créneau de fréquence f aux instants contenus dans le tableau `t` (de type `array`). On utilisera pour cela sa décomposition de Fourier sur ses `N` premières harmoniques.

7. Tracer le signal filtré pour un signal créneau d'entrée de fréquence. On prendra comme paramètres : $e_0 = 0$, $f = 1000\,\text{Hz}$, $H_0 = 1$ et $f_c = 1000\,\text{Hz}$.

8. Faire varier la fréquence du créneau d'entrée et vérifier qualitativement la nature intégrateur du filtre.

Exercice 2 Équation différentielle d'ordre 1

Objectif

On souhaite résoudre une équation différentielle d'ordre un de type :

$$y'(t) = f(y, t)$$

— sur un intervalle $[t_0, t_f]$;
— avec comme condition initiale $y(t_0) = y_0$

> **Exemple**
>
> $y'(t) = y$ ou bien $y'(t) = y^2(t)\sin(t)$

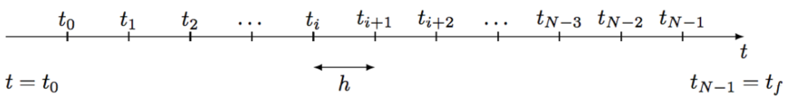
Notations

On notera :

- y_i la fonction à l'instant t_i : $y(t_i) = y_i$
- h le **pas** de résolution :

$$h = \frac{t_f - t_0}{N-1} \quad \text{soit} \quad t_i = t_0 + i \times h$$

où N représente le nombre de points de discrétisation :



1 Principe de la résolution numérique

Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler consiste à calculer successivement des valeurs approchées de tous les réels $y(t_i)$ via la relation approchée :

$$y(t_{i+1}) \simeq y(t_i) + y'(t_i) \times h$$

où $y'(t_i)$ est calculée à l'aide de l'équation différentielle : $y'(t_i) = f(y(t_i), t_i)$ (et $y(t_i)$ par le calcul précédent de la méthode d'Euler...).

> **Exemple**
>
> Équation différentielle $y' = \frac{t}{2}$ avec pour condition initiale $t_0 = 1$ et $y_0 = \frac{1}{4}$ (voir la figure 1) [a].
>
> a. Dans ce cas la solution exacte est la fonction $y(t) = t^2/4$.

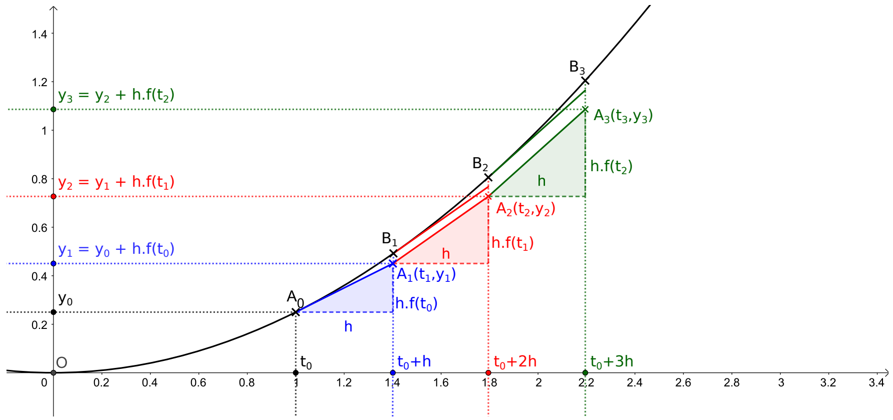


FIGURE 1 – Visualisation de la méthode d'Euler. Les points B_i représentent les points exacts de la fonction et les A_i ceux calculés par la méthode d'Euler (source : https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_d%27Euler).

Inconvénient

L'erreur est cumulative : chaque point est calculé à partir du précédent en ajoutant une petite approximation.

1. Compléter la fonction `euler_ordre1(t, y0)` suivante mettant en œuvre la méthode d'Euler :

```python
def euler_ordre1(t, y0):
  """
  Méthode d'Euler de résolution d'une équation différentielle d'ordre 1
  t : tableau des valeurs des dates
  y0 : valeur initiale
  Nécessite la fonction derivee(y, t), expression de la dérivée y' en
    fonction de y et t
  """
  N = len(t)                   # nombre d'instants considérés
  h = ...                      # pas de discrétisation
  y = np.zeros(N)              # tableau de valeur de la fonction y. Ne
      contient que des zéros pour l'instant
  y[0] = y0                    # attribution de la valeur initiale
  for i in range(1, N):
    ...
```

```
    return y
```

Elle fera appel à la fonction `derivee(y, t)` (définie plus tard) renvoyant la dérivée $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ en fonction de y et du temps t.

2 Exemple simple

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = \frac{t}{2}$$

avec pour condition initiale :

$$y(t=1) = \frac{1}{4}$$

On s'intéresse à sa solution entre les instants $t = 1\,\mathrm{s}$ et $t = 2,4s$.

2. Résoudre analytiquement cette équation.

3. En utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = 0{,}4\,\mathrm{s}$, calculer les 3 premières valeurs de y. Comparer avec les valeurs exactes obtenues à partir de la résolution de l'équation différentielle.

4. Résoudre numériquement cette équation à l'aide de la méthode d'Euler explicite. On prendra pour pas $h = 0{,}4\,\mathrm{s}$ puis $h = 0{,}1\,\mathrm{s}$. Conclure.

5. Résoudre cette équation différentielle à l'aide de la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate`[1].

3 Exemple : circuit RC en régime forcé

On considère un circuit RC série de la figure 2 avec les paramètres suivants :

$$R = 1 \cdot 10^3\,\Omega \quad ; \quad C = 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$$

et pour condition initiale :

$$u_c(t=0) = 2\,\mathrm{V}$$

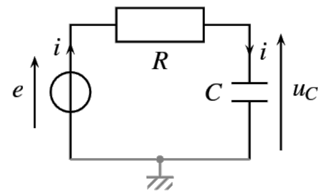


Figure 2 – Circuit RC série.

La tension aux bornes du générateur est de la forme :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad E_0 = 2\,\mathrm{V} \quad \text{et} \quad \omega = 10 \cdot 10^3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

6. Résoudre numériquement cette équation différentielle l'aide de la méthode d'Euler explicite puis avec la fonction `odeint` .

1. Documentation à propos de la fonction `odeint` : https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html.