Inégalité et applications – Exercices

Inégalités

Exercice 2.1
1. Soit $x, y, a \in \mathbb{R}$. Sous quelle hypothèse a-t-on :
a) $x \leq y \;\Rightarrow\; x^2 \leq y^2$;
b) $ax \leq ay \;\Leftrightarrow\; x \leq y$.
2. Soit $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq b$ et $x \leq y$. Que peut-on dire de $a - x$?

Exercice 2.2 *Encadrement* **Méthode**

Il y a deux approches :
- Travailler sur les inégalités pour reconstruire l'expression étudiée ;
- Utiliser les variations d'une fonctions : intervalle où la fonction est monotone.

1. Soit $x \in [-2, 1]$, donner un encadrement optimal de l'expression $x^2 + x$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $i, j \in \mathbb{N}$ tel que $i + j = k$. Donner un encadrement de i, c'est-à-dire les valeurs que peut prendre i.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, donner un encadrement raisonnable de l'expression $\cos(x)^2 + \sin(x)$.
4. Soit $x \in [-2, 1]$, $y \in [-1, 3]$ et $z \in [2, 3]$. Donner un encadrement optimal pour chacune des expressions suivantes : xy, $\dfrac{y}{z}$, $x + y - 2z$.

Exercice 2.3 Montrer les inégalités suivantes.
1. Pour tout $x, t \in \mathbb{R}_+$, $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$
2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|}$
3. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $|ab| \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

Méthode

➜ **Gestion d'une valeur absolue :**
- On considère que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Il convient alors de discuter suivante le signe de x.
- On considère que $|x| = \max(x, -x)$. Alors

$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq a \text{ et } -x \leq a$$

Exercice 2.4 Soit m un paramètre réel. Résoudre et discuter les inéquations réelles :

$$(1) \quad \frac{x - m}{m - 2} > 3 - x \qquad (2) \quad \sqrt{2x + m} \geq x + 1$$

Indication : Lorsque l'on multiplie une inégalité par un nombre négatif, il faut inverser le sens de l'inégalité. De plus, $\sqrt{a} \geq b$ est automatiquement vérifié lorsque $b \leq 0$.

Exercice 2.5 Soient $x, y \in \left]-1, 1\right[$. Montrer : $\dfrac{x + y}{1 + xy} \in \left]-1, 1\right[$

Applications

Exercice 2.6 Déterminer l'ensemble des fonctions simultanément périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.7 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si f est paire (resp. impaire, resp. T-périodique) alors f' est impaire (resp. paire, resp. T-périodique).
Les réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 2.8 Pour chaque fonction, donner le domaine définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée. **Méthode**

➜ Le domaine de définition est l'ensemble de valeurs où l'expression est bien définie.
Exemple : Expliciter chaque contrainte et de donner l'ensemble associé
Pour $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{x + 1}$, $\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2 - 2 \geq 0 \text{ et } x + 1 \neq 0\right\} = \cdots$

$$f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} - 4x \qquad g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \qquad h : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$j : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad k : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

Exercice 2.9 Étudier les variations des fonctions suivantes. Méthode

➜ **Étude du signe d'une expression** (*la dérivée f'*) :

• Si l'expression est sous forme de somme, considérer le signe de chaque terme, s'ils ont tous le même, alors on peut conclure directement.

• Si l'expression est sous forme d'un produit/quotient, faire un tableau de signe.

• Étudier les variations de toute l'expression ou d'une partie (un facteur) afin d'en déduire le signe.

Attention ! La méthode la plus courante est de factoriser l'expression et de faire un tableau de signes.

1. $a : x \mapsto \dfrac{2-x}{x+1}$.
2. $b : x \mapsto xp^x$ où $p > 0$ (on discutera selon les valeurs de p).
3. $c : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+2} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.
4. $d : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(1-x)}$
5. $f : x \mapsto \dfrac{e^x-1}{x}$

Exercice 2.10 Montrer les inégalités suivantes. Méthode

➜ **Établir une inégalité entre deux fonctions :** $\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x)$

Une approche (parmi d'autres) consiste à étudier le signe de la fonction :

$$h : x \mapsto g(x) - f(x)$$

1. Pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

Exercice 2.11

1. a) Établir, pour tout réel x : $\quad 1 + x \leq e^x$.

b) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$(1+\frac{t}{n})^n \leq e^t \text{ et } (1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t} \quad \text{puis} \quad (1-\frac{t^2}{n^2})^n e^{-t} \leq (1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$$

2. a) Établir, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x de $[0;1]$:

$$(1-x)^n + nx - 1 \geq 0$$

b) En utilisant **1.b.** et **2.a.**, montrer, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$: $0 \leq e^{-t} - (1-\dfrac{t}{n})^n \leq \dfrac{t^2}{n}e^{-t}$

Exercice 2.12 *Application réciproque* Méthode

➜ Identification de f^{-1}

• Méthode 1 : l'exercice met en évidence une relation du type $g \circ f = \mathrm{Id}$

• Méthode 2 : résoudre l'équation $f(x) = y$ de paramètre y et d'inconnue x. L'existence éventuelle et le nombre de solutions permet de déterminer la nature (injective ou surjective) de f.

Ici, résoudre $f(x) = y$ en faisant apparaître un trinôme en e^x. On posera $\boxed{z = e^x}$ pour poursuivre la résolution.

On considère l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 2.13 Classique

Les applications suivantes sont elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Définir une restriction sur un intervalle contenant le nombre -1 (quitte à réduire l'ensemble d'arrivée) qui soit bijective et donner l'expression de la fonction réciproque associée.

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{4x+2}{x-1}$
2. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2}{x} + x$

Exercice 2.14 Étudier les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x} - \ln(x+2)$.
2. $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Dérivées successives

Exercice 2.15 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions suivantes sont dérivables n fois sur leur ensemble de définition et déterminer leur dérivées successives :

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \frac{1}{1-x}$$

Exercice 2.16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

où P_n est une fonction polynomiale. On précisera l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n.

Dérivées partielles

Exercice 2.17 On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 3xy^2 + 5x^2 + xy - 2y - \cos(y^2) + 1.$$

Si l'on suppose y constant, la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est appelée la dérivée partielle par rapport à x et notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Calculer $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, que l'on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Calculer de même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
Que remarque-t-on ?

Trigonométrie

Exercice 2.18 $\theta \in [-\pi, \pi]$ étant fixé, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} & u_0 = 2\cos(\theta) \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.
On pourra utiliser la formule $1 + \cos(2a) = 2\cos(a)^2$.

Exercice 2.19 Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(a)\ \cos(x) = \cos(2x)$	$(e)\ \tan(x) \geq 2\sin(x)$
$(b)\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$(f)\ \sin(x)\cos(x) = -\frac{1}{4}$
$(c) 4\cos^2(x) \geq 3$	$(g)\ \cos(x)^2 \geq \cos(2x) + \frac{1}{2}$
$(d) \mathrm{Arccos}(\cos(2x)) = \frac{5\pi}{6}$	$(h)\ \cos(x) = 2\sin(x)^2 - 1$

Exercice 2.20 Résoudre les équations trigonométriques suivantes :
1. $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \dfrac{4\pi}{5}\right)$
2. $\cos(4x) = \sin(7x)$
3. $\cos(2x) + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$

Exercice 2.21 Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes :
1. $\cos(x) \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) \geq 1$
3. $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 < 0$

Exercice 2.22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arcsin}(2x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\mathrm{Arcsin}\big(\sin(x)\big) = \frac{\pi}{9}$$

Fonctions usuelles

Exercice 2.23 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{1}{2}\Big(\ln(x) + \ln(3)\Big)$$

Exercice 2.24 *Équation de Bresson*
Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation : $4^x + 6^x = 9^x$

Exercice 2.25 Résoudre l'équation : $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 2.26 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -2x\sqrt{-\ln(x)}$$

Étudier f et donner l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 2.27 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln\big(|2x+1|\big) + \ln\big(|x+3|\big) < \ln(3)$$

Exercice 2.28 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\log_x(10) + 2\log_{10x}(10) + 3\log_{100x}(10) = 0$$

Exercice 2.29 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

Exercice 2.30 Étudier la dérivabilité et donner l'expression de la dérivée lorsqu'elle existe dans les cas suivants :

$$a(x) = \ln\big(\left|x^2 - 5x + 6\right|\big) \qquad d(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x) + 1}$$

$$b(x) = \sqrt{\exp(x) - 1} \qquad e(x) = x^x$$

$$c(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right) \qquad f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 2.31 Prouver :

1. Pour tout $x > 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
2. Pour tout $x < 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$
3. Pour tout $x \in [0,1]$, $\text{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) + \text{Arcsin}\left(\sqrt{1-x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
4. Pour tout $x \in]0,1]$, $\text{Arcsin}(2x-1) + 2\text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2.32 On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{th}\,(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

1. Étudier la fonction th et montrer qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note Argth la fonction réciproque.
2. Montrer que Argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
Indication : établir $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x)$.

Exercice 2.33

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$5\text{ch}(x) - 4\text{sh}(x) = 3$$

2. Simplifier

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+\text{th}(x)}{1-\text{th}(x)}}\right)$$