Nombres complexes – Exercices

Forme algébrique, forme trigonométrique

Exercice 3.1 Mettre sous forme algébrique :

$$a = \frac{2+i}{i},\ b = \frac{1}{1-4i},\ c = \frac{1+i}{i-2},\ d = \frac{(1+i)(4+3i)}{(5-i)(2+i)}$$

Exercice 3.2 Donner le module et un argument des nombres suivants :

$$\begin{array}{llll} a & = -3+3i & d & = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} \\ b & = -3+\sqrt{3}i & e & = -2 \\ c & = (i-\sqrt{3})^{2023} & f & = (2-2i)(\sqrt{3}+i) \end{array}$$

Exercice 3.3 Mettre sous forme trigonométrique :

$$z_1 = 1+\cos\varphi - i\sin\varphi;\ \ \varphi \in [0, 2\pi[\qquad z_3 = \frac{\cos x - i\sin x}{\sin x - i\cos x};\ \ x \in \mathbb{R}$$

$$z_2 = 1 + i\tan\alpha;\ \ \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad z_4 = \frac{(-7+7i)^2}{(\sqrt{3}-i)^3}$$

Exercice 3.4
Expliciter la forme algébrique et la forme trigonométrique de $\omega = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3.5 On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer j^2, et en déduire les relations

$$1 + j + j^2 = 0 \qquad j^3 = 1 \qquad \frac{1}{j} = j^2 = \overline{j}.$$

2. Mettre sous forme algébrique $(1+j)^6$. Calculer $j^{2023} + j^{2024} + j^{2025}$.

Exercice 3.6 **Prog**

Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Méthode

➜ Compléter la formule d'Euler pour travailler dans $\mathbb{C}$
Ici, considérer $C_n + iS_n$

Exercice 3.7 Calculer la somme $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(kx)$

Indication : Même méthode que pour l'exercice 3.6.

Exercice 3.8 Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{N}$$

Indication : Utiliser la forme trigonométrique.

Exercice 3.9 *Linéarisation* **Classique**

1. Linéariser $\cos(x)\sin(3x)^3$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(3x)^3 \mathrm{d}x$.

2. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 \mathrm{d}x$.

3. Donner une primitive de : $f_1 = \sin^5 \quad f_2 = \cos^5 \quad f_3 = \sin^2\cos^2$

Exercice 3.10 *Formule de Machin*
Montrer que : $\dfrac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right)$
Avec cette formule, John Machin calcula en 1706 les 100 premières décimales de π.

Exercice 3.11
1. Montrer que $\forall c, d \in \mathbb{C}, \quad |2\mathrm{Re}\,(cd)| \leq 2|cd| \leq 1 + |cd|^2$

2. Pour chaque égalité, caractériser le cas d'égalité.
3. En déduire que $\forall c, d \in \mathbb{C}$

$$|c-d|^2 \leq (1+|c|^2)(1+|d|^2)$$

et préciser le cas d'égalité.

Equations et calculs de racines nièmes

Exercice 3.12
1. Calculer, dans $\mathbb{C}$, les racines carrées de $1-3i$, $3-i\sqrt{2}$ et $-7-24i$.
2. Calculer la puissance 4 ième et les racines 5 ième de $\sqrt{3}-3i$.

Exercice 3.13 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4-(5-14i)z^2-2(12+5i)=0$.

Exercice 3.14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3-(3+3i)z^2+(3+10i)z+3-9i=0$$

sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Exercice 3.15 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^5 = i$ *b)* $z^2-2iz-2i=0$ *c)* $z^2-(3+2i)z+(1+i)=0$

d) $z^4=2+2i$ *e)* $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=1 \end{cases}$ *f)* $(1+i\sqrt{3})z^4=1-i$

Exercice 3.16 Méthode

➜ Se ramener rechercher des racines nième de l'unité.
Ici, mettre l'équation sous la forme $Z^4=1$.

Résoudre l'équation $(2z-1)^4=z^4$.

Exercice 3.17
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, avec $n \geq 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z+1)^n-(z-1)^n=0.$$

Exercice 3.18 Méthode

➜ Lorsque l'expression est multiplicative, travailler à partir de la forme trigonométrique. Ici, considérer $z = re^{i\theta}$

Déterminer dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que : $\overline{z}=z^3$.

Exercice 3.19 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $|z-1|=1$, $z+\overline{z}=|z|$ et $|z-i|=|1-z|$.

Indication : Faire une interprétation géométrique.

Exercice 3.20
Déterminer les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ aient même module.

Autres exercices

Exercice 3.21
Soit $z \in \mathbb{C}$ de module 1. Comparer $\frac{1}{z}$ et $\overline{z}$?
Donner une caractérisation de $u \in \mathbb{R}$ en fonction de $\overline{u}$.
Soient z, $z' \in \mathbb{C}$ de module 1 avec $zz'+1 \neq 0$. Montrer que $u = \dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Indication : Montrer que $\bar{u}=u$ en utilisant $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

Exercice 3.22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $T = \displaystyle\sum_{\alpha \text{ tel que } \alpha^n=1} |\alpha-1|$.

Indication : Poser $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{n}}$; ainsi les racines n ième sont les α^k pour $k \in [\![0; n-1]\!]$. Ensuite se ramener à une somme de sinus par la formule d'Euler.

Exercice 3.23
Soient $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z|<1\}$.
1. Montrer que $\forall z \in \Pi$, $\dfrac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D}$.
2. Montrer que l'application $f : \Pi \to \mathcal{D}$ définie par $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection puis calculer sa réciproque.

Exercice 3.24 Soit l'équation : $a \in \mathbb{C}$ (E) $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a$

Montrer que $|a|=1$ est une condition nécessaire et suffisante pour que z soit un réel. Puis, résoudre (E) en posant $a=e^{i\theta}$.

Exercice 3.25
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que : $|z+1| < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |z^2+1| > \dfrac{5}{4}$.

Exercice 3.26 Résoudre $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.27 Soit z un complexe différent de -1, 0 et 1. A, B, C, D et E ont pour affixes respectives 1, -1, z, $\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.
1. Vérifier que C, D et E sont alignés.
2. Prouver que $[ED)$ est la bissectrice de l'angle de $[EA)$ et $[EB)$.

Exercice 3.28 Identifier les éléments caractéristiques des applications du plan représentées par :
1. $z \mapsto 2z-1+i$
2. $z \mapsto (1+i)z+2$