Primitives et équations différentielles

Primitives

Exercice 4.1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^3}, \quad I_2 = \int_0^2 t e^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad I_3 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t,$$
$$I_4 = \int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}, \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(\theta)}{\cos^4(\theta)}\,\mathrm{d}\theta, \quad I_6 = \int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 4.2 Déterminer une primitives et un intervalle associé pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{4x-1}, \quad f_2(x) = \sin^3(x), \quad f_3(x) = \ln(2x+3),$$
$$f_4(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2, \quad f_5(x) = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}, \quad f_6(x) = -\frac{x}{(3x^2-1)^5},$$
$$f_7(x) = \frac{1}{2x^2+4x+2}, \quad f_8(x) = \frac{1}{2x^2-x-1}, \quad f_9(x) = \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Exercice 4.3 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$$J_1 = \int_1^2 (t^2+2t-3)e^t\,\mathrm{d}t, \quad J_2(x) = \int^x \mathrm{Arccos}(t)\mathrm{d}t, \quad J_3 = \int_1^e \ln(t)^2\,\mathrm{d}t,$$
$$J_4 = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t, \quad J_5 = \int_0^{\pi/2} \sin(2t)e^{\cos(t)}\,\mathrm{d}t, \quad J_6 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.4 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

$$K_1 = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{\mathrm{d}x}{e^x - e^{-x}} \quad (t = e^x), \quad K_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x \quad \left(u = \frac{x}{x+1}\right)$$
$$K_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(\theta)}{1+\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \quad (s = \cos(\theta)), \quad K_4 = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{e^u-1}} \quad (s = \sqrt{e^u-1})$$
$$K_5(x) = \int^x \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t, \quad (t = \tan(\varphi)), \quad K_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t, \quad (t = \cos(2\theta))$$

Exercice 4.5 Déterminer une primitive sur un intervalle à préciser de chacune des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \frac{i}{(x+i)^2}, \quad g_2(x) = e^{-x}\sin(2x), \quad g_3(x) = \frac{1}{x+i}, \quad g_4(x) = xe^{ix}$$

Exercice 4.6 Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$$
3. En déduire que : $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \dfrac{a!b!}{(a+b+1)!}$

Exercice 4.7 **Méthode**

> Considérer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur $[x, 2x]$ et introduire g une primitive qu'il ne sera pas utile d'expliciter : $g \in \mathcal{C}^1([x,2x])$.

Pour tout $x > 0$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer f'.
2. Montrer que f' admet une limite en 0.
3. On rappelle que $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ 1 - u \leq e^{-u} \leq 1$.
En déduire la limite de f en 0.
4. Montrer que f admet une limite à déterminer en $+\infty$.

Exercice 4.8 ❄ ❄ ❄ On note $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t-\ln(t)}\mathrm{d}t$

1. Montrer que φ est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\varphi'(x) = \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))}$$

2. En déduire les variations de φ.
3. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 \leq \varphi(x) \leq x$.
4. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0. On note φ la fonction ainsi prolongée. Préciser $\varphi(0)$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$.
Justifier que φ est dérivable en 0 et donner $\varphi'(0)$.

EDL d'ordre 1

Exercice 4.9 Résoudre les équations différentielles sur les intervalles précisés :

(E_1) $y' - 2xy = \mathrm{sh}(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$,

(E_2) $y' + y = x + \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$,

(E_3) $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$ sur $]0,\pi[$,

(E_4) $x\big(1+\ln^2(x)\big)y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.10 Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $]0;+\infty[$ vérifiant :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + xf(1)$$

Indication : montrer que si f est solution, alors f vérifie une certaine EDL1.

Exercice 4.11 On considère deux fonctions a et b dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe deux solutions différentes φ et ψ de l'équation :

$$(E)\ :\ y' + a(x)y = b(x)$$

telles que φ et ψ ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.
Montrer que toutes les solutions de (E) tendent vers ℓ en $+\infty$.

EDL d'ordre 2

Exercice 4.12 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\ :\ y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \qquad (E_2)\ :\ y'' + 2y' + y = 2e^{-x} + e^{3x}$$

$$(E_3)\ :\ y'' + 4y = \sin(2x) \qquad (E_4)\ :\ y'' - 2y' + y = e^x\cos(x)$$

Exercice 4.13 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' + 9y = t\cos(3t)$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 4.14 Soit y_1 et y_2 deux solutions sur $\mathbb{R}$ d'une même EDL du second ordre à coefficients constants :

$$(E)\ :\ y'' + ay' + by = f(t)$$

où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit τ-périodique et que :

$$y_1(0) = y_2(\tau) \quad \text{et} \quad y_1'(0) = y_2'(\tau)$$

Montrer qu'on a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_1(t) = y_2(t+\tau).$$

Exercice 4.15
Montrer que l'équation $y'' - 2y' + 2y = e^x\sin(x)$ possède une solution particulière sous la forme $x \mapsto \alpha xe^x\cos(x) + \beta xe^x\sin(x)$.

Exercice 4.16
1. Soit α et β deux nombres réels. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1) \ : \ y'' - y = \alpha e^x + \beta e^{-x}$$

2. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 4 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $z = y'' - y$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

si, et seulement si, z est solution d'une EDL du second ordre (E_2), que l'on précisera.

3. Résoudre (E_2) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4.17 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) \ : \ x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$$

en posant $z = x^2 y$ (comprendre : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ z(x) = x^2 y(x)$).

Exercice 4.18 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) \ : \ (1 + x^2)^2 y'' + 2(x - 1)(1 + x^2)y' + y = 0$$

en procédant au changement de variable $t = \text{Arctan}(x)$.

Méthode

Poser $z(t) = y\big(\tan(t)\big)$ ce qui revient à $y(x) = z\big(\text{Arctan}(x)\big)$, calculer y', y'' et remplacer dans l'équation en fonction z et en la variable t.

Exercice 4.19 On pose $I =]0; +\infty[$.
1. Résoudre sur I l'équation (E) à l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$:

$$(E) \ : \ 4x^2 y'' + y = 0$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, \ f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right).$$

Exercice 4.20 Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 4.21 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = f(-x)$$

On pourra commencer par montrer que si f est une solution alors f vérifie une certaine équation du second ordre.