

Ensembles et applications

SOMMES DOUBLES

Exercice 5.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$(1) \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n \frac{i}{k+1} \quad (2) \sum_{i=1}^n \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^i \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} 3^k \right) \quad (3) \sum_{1 \leq p < q \leq n} pq$$

Exercice 5.2 * Soit n entier naturel non nul. Prouver que :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \min(i, j)$$

Que vaut cette somme ?

ENSEMBLES

Exercice 5.3 Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E . Montrer que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ et que $A = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$.

Exercice 5.4 Soit E et F deux ensembles.

1. Montrer que $E \subset F$ si et seulement si $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
2. Comparer $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. Comparer $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

Indication : Raisonnement à double sens et donner un contre-exemple pour montrer qu'une inclusion est fautive en général.

Exercice 5.5

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de sous-ensemble de E . Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geq k$, on note

$$C_n = \bigcup_{i=k}^n A_i$$

Montrer que $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i$

Exercice 5.6 Soit $A \subset E$. Caractériser $X \subset E$ dans chacun des cas suivants :

$$(1) A \cup X = E \quad (2) A \cap X = A \quad (3) A \cup X = A \quad (4) A \cap X = \emptyset$$

Exercice 5.7 * Soit E un ensemble. À tout élément (A, B) de $(\mathcal{P}(E))^2$, on associe l'élément noté $A \Delta B$ de $\mathcal{P}(E)$ défini par :

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

1. A l'aide d'un diagramme, représenter l'élément $A \Delta B$.
2. Montrer que, pour tout $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$, on a :

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

3. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

APPLICATIONS

Exercice 5.8 Image directe, image réciproque

Soit $g : [0; 4\pi] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$.

Donner l'image directe de $[0, 1]$, $[0, 5]$, $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$.

Donner l'image réciproque de $\{0\}$, $\{\frac{1}{2}\}$, $[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

Exercice 5.9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Dans cet exercice, vous avez la liberté d'introduire les constantes qui faciliteront la rédaction.

1. Dresser le tableau de variation de f . Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$. Préciser l'image réciproque de $\{0\}$ par f , de $\{6\}$ par f .
2. Déterminer $f([2, 3])$, $f(]0, 3])$, $f^{-1}(]0, +\infty[)$, $f^{-1}([-6, 6])$,
3. f est elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier chaque réponse.

4. Déterminer deux intervalles ouverts I et J tels que $g : \begin{cases} I \rightarrow J \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ soit bijective avec $0 \in I$ et $0 \in J$

Exercice 5.10 Écrire toutes les applications de $E = \{1, 2\}$ dans $F = \{a, b, c\}$ et, pour chacune, indiquer si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

Exercice 5.11 * Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Montrer que :
 1. $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.
 2. $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.

Exercice 5.12 Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 5.13 * Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que : « f est injective ou surjective» si et seulement si $f = \text{Id}_E$

Exercice 5.14 * Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 5.15 * * Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que :

- (i) f est injective $\Leftrightarrow \forall A \subset E, f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$
- (ii) f est surjective $\Leftrightarrow \forall A \subset E, f(\bar{A}) \supset \overline{f(A)}$

Exercice 5.16 * * Soient E un ensemble, $A, B \subset E$ et Classique

$$f : \begin{matrix} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{matrix}$$

1. Trouver une C.N.S. portant sur A et B pour les deux cas suivants :
 - a) f injective.
 - b) f surjective.
2. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1} .

Indication : Injectivité : regarder l'image de E et de $A \cup B$.
 Surjectivité : considérer un antécédent de (A, \emptyset) .

Exercice 5.17 *Théorème de Cantor–Bernstein* * * *
 Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E, g \in E^F$ deux applications injectives. Montrons qu'il existe une bijection de E dans F .

Nous pouvons définir par récurrence :

$$\begin{cases} A_0 = \overline{g(F)} \subset E \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} = g \circ f(A_n) \subset E \end{cases}$$

et l'ensemble

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

1. Démontrer que

$$\begin{cases} g \circ f(A) \subset A \\ \bar{A} = g(F) \setminus g \circ f(A) \end{cases}$$

2. Soit φ la fonction définie sur E par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ "g^{-1}(x)" & \text{si } x \in \bar{A} \quad \text{"antécédent de } x \text{ par } g" \end{cases}$$

- a) Démontrer que φ est injective,
- b) Démontrer que φ est surjective,
- c) Conclure

3. Soit $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par :

$$s(n) = n + 1$$

Préciser les ensembles A, \bar{A} et la fonction φ lorsque $E = F = \mathbb{N}$ et $f = g = s$.

Remarque – Le théorème de Cantor-Bernstein est utile pour définir une relation d'ordre sur les classes d'ensembles équipotents.

Exercice 5.18 *Equipotence* * * *
 Déterminer des bijections telle que :

$$f_1 \in]0, 1[^{[0, 1[}, \quad f_2 \in \mathbb{R}^{]0, 1[}, \quad f_3 \in ([0, 1[2]^{]0, 1[}, \quad f_4 \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}}$$

RELATIONS BINAIRES

Exercice 5.19 Que pouvez-vous dire de la relation binaire sur l'ensemble a, b, c, d définie par :

\mathcal{R}	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	1	1	1	1
c	1	0	1	1
d	0	0	0	1

Exercice 5.20 Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff (\forall A \in \mathcal{P}(E), \{x, y\} \subset A \text{ ou } \{x, y\} \subset \bar{A})$$

Montrer que R est une relation d'équivalence.

Décrire les classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 5.21 *Nombre de relations d'équivalence* ✨ ✨

Soit \mathcal{R}_n le nombre de relation d'équivalence sur un ensemble à n éléments.

1. Montrer que qu'il existe une bijection entre les relations d'équivalence sur une ensemble E et l'ensemble des partition de E .

2. Trouver une relation de récurrence entre \mathcal{R}_n et les $\mathcal{R}_k, k < n$.

3. Calculer \mathcal{R}_n pour $n \leq 6$.

Rappel : $\binom{q}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments dans un ensemble de q éléments.

Indication : Fixer un élément et raisonner sur la taille de sa classe d'équivalence.