Nombres réels et suites numériques

Les nombre réels

Exercice 7.1 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 7.2 ❄❄ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer, s'ils existent, $\inf(A)$, $\sup(A)$, $\min(A)$ et $\max(A)$, dans les cas suivants :

$$A = \left\{ \cos\left(\frac{2n\pi}{7}\right) \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B = \left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \left(1 + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \ln(n) \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad D = \left\{ \frac{1 + \cos(n)}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 7.3 ❄ Soit $X \subset \mathbb{R}$, $f, g \in \mathbb{R}^X$ deux fonctions majorées. On note

$$\sup(f) = \sup\{f(x);\ x \in X\}$$

1. Montrer que $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$.
2. Donner deux fonctions telles que l'inégalité précédente est stricte.

Exercice 7.4 A et B sont deux parties non disjointes de $\mathbb{R}$ telles que $A \cup B$ est majorée. Montrer que $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\sup(A \cap B)$ et $\sup(A \cup B)$ existent et trouver, en les justifiant, des relations entre ces réels

Exercice 7.5 ❄❄ Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup_{x,y \in A} |x - y| = \sup(A) - \inf(A)$$

Exercice 7.6 ❄❄ **Prog**

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que

(i) si X est majorée, il existe une suite d'élément de X qui converge vers $\sup(X)$,

(ii) si X n'est pas majorée, il existe une suite d'élément de X qui tend vers $+\infty$.

Généralité sur les suites réelles

Exercice 7.7

1. La somme de deux suites majorées est-elle une suite majorée ?
2. Le produit de deux suites majorées est-il une suite majorée ?

Exercice 7.8 ❄❄

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $k, n \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$|u_n| \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Exercice 7.9 Que dire d'une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 7.10 **Méthode**

Étudier les variations des suites dont le terme général est :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}, \quad b_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2 + 1}, \quad c_n = -\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{n^2}{k}\right)$$

Exercice 7.11 Montrer que les suites suivantes sont bornées :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{n}, \quad v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1}, \quad w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Exercice 7.12 Déterminer les limites des suites $(a, b > 0)$:

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad v_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad t_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Inégalité et monotonie

Exercice 7.13 Considérer le suite de terme général :

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

1. Réécrire u_n avec le symbole $\sum$.
2. Encadrer le plus finement possible le terme général de la somme puis en déduite un encadrement de u_n
3. Utilisant le théorème des encadrements, en déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 7.14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

On rappelle que pour tout $x \geq 0$, on a : $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

1. Donner un encadrement de $\ln(u_n)$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Exercice 7.15 Soient a et b deux suites prenant leurs valeurs dans $[0,1]$. On suppose que la suite produit $a.b$ converge vers 1.

1. Comparer les suites a, b et $a.b$.
2. En déduire que a et b convergent et déterminer leur limite.

Exercice 7.16 Classique

Soient a et b deux réels positifs tels que $a \leq b$.
Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de la suite $(b_n - a_n)$ en considérant $b_{n+1} - a_{n+1}$.
2. Déterminer le signe de $a_{n+1} - a_n$. En déduire la variation de (a_n).
3. Étudier la variation de la suite (b_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.
5. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n \leq \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.
6. Montrer que la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0.
7. Que dire des suites (a_n) et (b_n) ?

La limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Exercice 7.17 Soit (u_n) définie pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n\ln(n)}$.

1. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Montrer que

$$\ln(k) \geq \int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t$$

2. Par sommation, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\ln(n!) \geq \displaystyle\int_1^n \ln(x)dx$
3. Vérifier que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$, $u_n \geq 1 - \dfrac{n-1}{n\ln(n)}$
5. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 7.18 Considérons la suite (u_n) telle que $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$$

1. Exprimer u_{n+1}^2 en fonction u_n.
2. En déduire que (u_n) est croissante.
3. a) Que dire sur le comportement de (u_n) ?
b) Raisonnant par l'absurde, montrer que la limite n'est pas finie.
c) Donner la limite de la suite.
4. Proposer une autre approche pour déterminer la limite éventuelle de (u_n) en minorant u_n, puis en utilisant le théorème de comparaison.

Exercice 7.19 *Suite harmonique* Classique

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n}$

1. Quel est le sens de variation de cette suite ?
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. Raisonnant par l'absurde, en déduire la limite de la suite.

Exercice 7.20 *Croissance logarithmique comparée*

Soient $(a_n),(b_n) \in \mathbb{R}_+^{*\,\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

Montrer que si $b_n \to 0$, alors $a_n \to 0$.

Exercice 7.21 Méthode

➜ Comparer un nombre à u_n défini implicitement par $f_n(u_n) = 0$

• Considérer le signe de f_n :

x	u_n
$f_n(x)$	$-$ 0 $+$

• si $f_n(a) \leq 0$ alors $a \leq u_n$ sinon $a > u_n$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul $x_n \in [0,1]$ tel que : $P_n(x_n) = 0$.
2. Étudier la monotonie de la suite (x_n).
En déduire qu'elle converge vers $\ell \in [0,1]$.
3. Raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.
4. Montrer que, à partir d'un certain rang, $0 \leq 1 - x_n \leq \dfrac{\ln(n)}{n}$. ❆ ❆

Exercice 7.22 Soit $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Méthode

1. Donner l'expression de $u_{2n} - u_n$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Montrer que pour tout $k \geq 2$
$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
4. En déduire une comparaison de $\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$, $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$.
5. Donner un encadrement de $u_n - 2\sqrt{n}$.
6. Montrer que $(u_n - 2\sqrt{n})$ est bornée.
7. Montrer que $(u_n - 2\sqrt{n})$ converge.

Suites extraites

Exercice 7.23 Soit (u_n) une suite réelle. Parmi les affirmations qui suivent, dire lesquelles sont vraies. Justifier.

1. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors, (u_n) converge vers ℓ.
2. Si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.
3. Si (u_{kn}) converge, pour tout $k \geq 2$, alors (u_n) converge. ❆ ❆
4. Si (u_n) est monotone et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite qui tend vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. ❆ ❆

Exercice 7.24 Montrer qu'une suite non majorée possède une sous-suite divergente.

Exercice 7.25

1. Soient $[a,b]$ un intervalle fixé de $\mathbb{R}$ (a et b réels, $a < b$) et $N \geq 1$ un entier fixé. Montrer que l'ensemble des rationnels de $[a,b]$ dont le dénominateur est inférieur ou égal à N est un ensemble fini (chaque rationnel est supposé mis sous forme canonique).
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge dans $\mathbb{R}$, ℓ sa limite.
On note, pour chaque n, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, où $(p_n,q_n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, avec p_n et q_n premiers entre eux.

a) Montrer que si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, ℓ est rationnel.

b) Montrer que, plus généralement, si q_n ne tend pas vers $+\infty$, l est rationnel.

c) Peut-on affirmer que, si q_n tend vers $+\infty$, ℓ est irrationnel ?

Exercice 7.26 Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.

Comparaison

Exercice 7.27 Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité ;

$$(i)\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2},\ \frac{\ln(n)}{n},\ \frac{\ln(n)}{n^2},\ \frac{1}{n\ln(n)} \qquad (ii)\ n,\ n^2,\ n\ln n,\ \sqrt{n}\ln(n),\ \frac{n^2}{\ln(n)}.$$

Exercice 7.28 En discutant suivant les valeurs de a et b, donner un équivalent en $+\infty$ de :

$$\frac{an^3+5n-2}{bn^2+2n+3}$$

Exercice 7.29 Trouver les limites de :

$$u_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \qquad v_n = \frac{\exp\left(\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)-e}{\tan\frac{1}{n}}$$

$$w_n = n^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\frac{n^2}{2}\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \qquad t_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$$

Exercice 7.30 Trouver un équivalent simple pour chacune des suites ci-dessous et donner leur limite éventuelle :

(i) $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln(n)-2n^2}$, (ii) $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$, (iii) $(n+3\ln(n))e^{-(n+1)}$,

(iv) $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$, (v) $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$, (vi) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$,

(vii) $\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$, (viii) $\sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, (ix) $\ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 7.31 Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$. Montrer que $u_n \sim n!$.

Exercice 7.32 Classique

Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose : $P_n = X^5+nX-1$.

1. Montrer que P_n a une unique racine dans $[0,1]$. On la note u_n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Montrer qu'elle converge vers 0.
3. Montrer que $nu_n\to 1$. En déduire un équivalent simple de u_n.
4. Donner un équivalent de nu_n-1. En déduire :

$$u_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Suites particulières

Exercice 7.33
Montrer, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0;1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$$

Exercice 7.34 Exprimer en fonction de n les suites suivantes :

1. $u_3 = 4$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$
2. $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 2-3u_n$
3. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$
4. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ 6u_{n+2}-5u_{n+1} = -u_n$
5. $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1}-4u_n$
6. $u_0 > 0,\ u_1 > 0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$

Exercice 7.35 Soient u, v les suites définies par : $u_0 = -2$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3-u_n} \qquad v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

1. Montrer que la suite v est géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Exercice 7.36 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant :

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout } n\in\mathbb{N} : u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{2}e^{u_n}\right).$$

1. Poser $v_n = e^{u_n}$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (v_n).
2. Expliciter (v_n), puis (u_n) et donner l'éventuelle limite de (u_n).

Exercice 7.37 Classique

Soit $A = \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. On désirer calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de A et I_3.

2. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_nA + b_nI_3$.
En particulier, donner une relation de récurrence sur (a_n) et (b_n).

3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de a_n et b_n en fonction de n puis l'expression de A^n en fonction de A, I_3 et n.

Exercice 7.38

1. Une grenouille monte un escalier de 13 marches. Elle ne peut progresser que par sauts d'une ou deux marches. De combien de façons différentes peut-elle arriver au sommet ?
On remarquera qu'une progression de la grenouille est une suite de 1 et de 2 dont la somme vaut 13.

2. On suppose maintenant que l'escalier comporte n marches ($n \in \mathbb{N}^*$). On note G_n le nombre de progressions possibles jusqu'au sommet.
Établir une relation de récurrence entre G_{n+2}, G_{n+1} et G_n.
En déduire G_n.

Exercice 7.39 *Solution particulière* ❄

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1, \ u_1 = \sqrt{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n = n \ (\bigstar) \end{cases}$

1. Chercher une suite vérifiant $(\bigstar)$ sous la forme $v_n = an + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
C'est-à-dire, remplacer u_n par l'expression de v_n dans $(\bigstar)$ et déterminer les valeur de a et b pour que l'égalité soit vraie pour tout n.

2. On introduit la suite de terme général $w_n = u_n - v_n$. Déterminer une relation de récurrence vérifié par (w_n).

3. Expliciter la suite (w_n) puis la suite (u_n).

Exercice 7.40 ❄❄ **Méthode**

Soient $a > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2u_n - au_n^2.$$

Déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.41 ❄❄ **Méthode**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{1}{1+2u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$ et décroissante et que la suite $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{1}{2}$ et croissante.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 7.42 *Méthode de Héron d'Alexandrie* ❄❄

Soient $a > 0$, $u_0 > \sqrt{a}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Montrer qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.

2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}.$$

En déduire une majoration de $u_n - \sqrt{a}$ par une expression dépendant de n, a et $u_0 - \sqrt{a}$.

3. On prend $a = 5$ et $u_0 = 2,4$. Déterminer n pour que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-10} près.

Exercice 7.43

Étudier les suites définies par : $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{a_n^2 + b_n^2}$.
