Limite et continuité – Exercices

Limite, comparaison

Exercice 8.1
Pour chaque des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et la limite éventuelle en x_0.
Préciser si la fonction y est continue, s'y prolonge par continuité ou rien de cela.

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + (a-1)x + 3 - 3a}{x^2 - 4x + 3},\ x_0 = +\infty, -\infty, 3, 1\ (a \in \mathbb{R})$$

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin(x)},\ x_0 = 0$$

$$f_3(x) = 2x + \frac{\sqrt{9x^2}}{x},\ x_0 = 0 \qquad f_4(x) = \frac{\sin(x) - \sin(3x)}{\sin(4x)},\ x_0 = 0$$

Exercice 8.2 Déterminer l'ensemble de définition puis étudier les limites et branches infinies éventuelles de :

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln(x)}.$$

Exercice 8.3 Étudier les limites et les branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction :

$$\varphi(x) = \frac{e^{2x} + e^x + x}{e^x - x}.$$

Exercice 8.4 Étudier le domaine de définition, la continuité ou le prolongement par continuité éventuel aux points opportuns, des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \qquad g_2(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$$

$$g_3(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x} - 1} \qquad g_4(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$$

Exercice 8.5 Calculer la limite éventuelle des fonctions suivantes au point indiqué :

$$h_1(x) = \frac{x}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ en } 0 \qquad h_2(x) = \frac{x\cos(x)}{x^2+1} \text{ en } +\infty$$

$$h_3(x) = \frac{(1+x)(x-1)}{x - \sqrt{2-x}} \text{ en } 1 \quad h_4(x) = (-x\ln(x))^x \text{ en } 0^+$$

Exercice 8.6 *Négligeabilité*
Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité :
1. en 0 : $\ln(x^2)\sin^2(x),\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right),\ (e^x - 1)^2,\ \ln(x)\ln(1+x)$;
2. en $+\infty$: $a^x,\ (\ln(x))^x,\ x^{\ln(x)},\ x^a,\quad$ où $a > 1$.

Exercice 8.7 Trouver des fonctions f et g telles que :

$$(1)\ f \underset{0}{\sim} g \text{ et } \lim_{x\to 0}(f-g)(x) \neq 0 \qquad (2)\ f \underset{1}{\sim} g \text{ mais pas } e^f \underset{1}{\sim} e^g$$

Exercice 8.8 Trouver un équivalent simple pour chacune des fonctions ci-dessous et donner leur limite éventuelle :

(i) $\sin(x)\ln(\tan(x))$ en 0 $\qquad (ii)$ $\ln(2-x)\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ en 1

(iii) $\exp(x^2) - \cos(x)$ en 0 $\qquad (iv)$ $\tan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{1 + \dfrac{2}{x}} - 1$ en $+\infty$

(v) $\ln(2\sin(x))$ en $\dfrac{\pi}{6}$ $\qquad (vi)$ $(x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}$ en $+\infty$

(vii) $\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{1+x}} - 1}{x}$ en 0 $\qquad (viii)$ $\dfrac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}$ en 0^+

Indication : (v) se ramener en 0 en posant $y = x - \frac{\pi}{6}$.

Exercice 8.9 On considère la fonction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 2 + \ln(x) \end{array}$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(3)$. Que peut-on en déduire pour l'équation $f(x) = 0$?
2. Montrer que f réalise une bijection. Étudier l'application réciproque notée g (continuité, variation, limites).

3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire $\lim_{+\infty} \dfrac{f\circ g}{g}$ puis un équivalent de g au voisinage de $+\infty$.
4. Trouver un équivalent de g au voisinage de $-\infty$. ❄ ❄

Exercice 8.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décroissante telle que :

$$f(x) + f(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Encadrer $2f(x)$, puis donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8.11
1. On dit que $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifie $\mathcal{P}$ si

$$\lim_{1} \varphi = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

Montre que "φ vérifie $\mathcal{P}$" est une condition suffisante pour pouvoir composer à gauche des équivalents :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \varphi(g(x))$$

2. Rechercher des CS qui permettent la composition à gauche d'équivalents.

Exercice 8.12 Trouver le signe, au voisinage de 0, de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} + x$.

Exercice 8.13 Étudier la continuité de $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 8.14 Soient f et g deux fonctions $I \to \mathbb{R}$ continues en $x_0 \in I$. Exprimer la fonction $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ avec des fonctions usuelles et montrer qu'elle est continues en x_0.

Exercice 8.15 ❄ ❄ Montrer que $\{\sin(\sqrt{n}); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Caractérisation séquentielle

Exercice 8.16 *Équation fonctionnelle*
Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(5x)$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{x}{5^n}\right) = f(x)$
2. Montrer que f est constante.

Exercice 8.17
Objectif : Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant :

($\bigstar$) : f continue en 0 et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

On suppose que f vérifie ($\bigstar$).
1. En remarquant que $0 + 0 = 0$ (si, si !), montrer que $f(0) = 0$, puis que f est impaire.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$; puis étendre ce résultat au cas où $n \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, en calculant $f\left(q\dfrac{p}{q}\right)$ de deux façons, montrer que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$$

4. Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité pour montrer que f est continue en tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Utilisant un résultat vu dans le chapitre sur les suites, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.
6. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant ($\bigstar$).

Indication : 4/ utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité avec $v_n \to x \quad \Leftrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = x + (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n \to 0$.
5/ Rappel : Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

Exercice 8.18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Raisonnant par l'absurde, montrer que f est constante.

Continuité sur un intervalle

Exercice 8.19 Montrer que l'équation suivante admet une solution sur $\mathbb{R}$:

$$x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1 = 0$$

Exercice 8.20 Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 8.21 Déterminer suivant $\lambda \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle x :

$$\exp(\lambda x) = x$$

Exercice 8.22 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : **Méthode**

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad \text{et } \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\ f(x) = \frac{x\ln(x)}{x-1}$$

Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8.23 Étudier la continuité des fonctions définies par les formules suivantes :

$$f_1(x) = (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$f_2(x) = \cos(\ln(x)) \times \ln(1+x)$$

Exercice 8.24 On considère f et g des applications continues sur un intervalle I. On suppose que :

$$\forall x \in I,\ f(x)^2 = g(x)^2 \neq 0$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 8.25
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 8.26
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant $+\infty$ comme limite en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 8.27 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que f admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_+$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell_-$. Montrer que f est bornée.

Exercice 8.28 Soit f, g des applications continues sur un segment $[a,b]$. On suppose que :

$$\forall x \in [a,b], \quad 0 < g(x) < f(x)$$

Montrer que :

$$\exists \lambda > 0 \text{ tel que } \forall x \in [a,b], \quad (1+\lambda)g(x) \leq f(x)$$

Exercice 8.29
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et telle que $\forall x \in]0,1]\ f(x) < x$.
1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Soit $a \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $k < 1$ tel que $\forall x \in [a,1]\ f(x) \leq kx$.
3. Peut-on trouver $k < 1$ tel que $\forall x \in [0,1]\ f(x) \leq kx$.

Indication : 1/ Théorème d'encadrements 2/ Image d'un segment par une fonction particulière 3/ Contre-exemple.

Exercice 8.30 *Théorème de la moyenne*

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Exercice 8.31 Soient f et g deux fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in [a;b]$, il existe $y \in [a;b]$ vérifiant $f(x) = g(y)$.
Montrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Monotonie sur un intervalle

Exercice 8.32 Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction croissante ($a < b$). On souhaite montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.
1. On pose $A = \{x \in [a,b] : f(x) \geq x\}$. Montrer que A admet une borne supérieure : on la note c.
2. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A de limite c. En déduire $f(c) \geq c$.
3. Étudier le cas $c = b$.
4. On suppose $c < b$. On considérant une suite d'éléments de $]c,b]$ de limite c, montrer que $f(c) \leq c$. Conclure.
5. Que devient le résultat si on suppose f décroissante.

Continuité et Monotonie

Exercice 8.33
1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle I à préciser. On appelle Arcsin la fonction réciproque. Représenter cette fonction.
2. Donner les ensembles de définition et représentations graphiques de $\sin \circ \mathrm{Arcsin}$ et $\mathrm{Arcsin} \circ \sin$.
3. Simplifier l'expression $\cos \circ \mathrm{Arcsin}$ sur $[-1, 1]$.
4. Donner un équivalent simple de $\mathrm{Arcsin}(u_n)$ où $u_n \to 0$.

Exercice 8.34 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $[-1, e^{-1}]$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 8.35 Montrer qu'il existe une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)^5 + f(x) + x = 0$$

Indication : On pourra travailler l'équation pour introduire une fonction g telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$

Exercice 8.36 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante.
Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 8.37
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeur dans $[0,1]$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que

$$f(a_n) = a_n^n$$

2. On suppose de plus f strictement décroissante. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est unique. Étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 8.38 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule :

$$f(x) = \frac{x^3}{|x^3| + 1}$$

Démontrer que f admet une bijection réciproque, puis expliciter la bijection réciproque.

Fonctions complexes

Exercice 8.39
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{1 + ix}$.
Démontrer la convergence de f en $+\infty$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{\exp(ix)}{x}$.
Étudier la convergence de g en 0.