Dérivabilité – Exercices

Dérivabilité

Exercice 9.1
Mettant en évidence des taux d'accroissements, calculer la limite éventuelle des fonctions suivantes au point indiqué :

$$f(x) = \frac{1-\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)+1} \text{ en } \pi \quad g(x) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \text{ en } \frac{\pi}{4}$$

Exercice 9.2 Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition et déterminer leur dérivée. Méthode

➜ Dérivabilité d'une fonction
- établir la classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles (ouverts) où l'expression est bien définie, à l'aide des théorème généraux
- étudier la continuité aux points de raccords
- étudier la dérivabilité aux points de raccords : premièrement en essayant de prolonger la dérivée, puis si cela ne donne rien, en revenant à la définition (taux d'accroissements).

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \ln(x)\sqrt{x^2-1} \text{ si } x \geq 1,$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{\cos(x)} & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}, \qquad f_4(x) = \begin{cases} 1-e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2(1-e^x)}{e^x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

Exercice 9.3 Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. On appelle Arccos la bijection réciproque.
Étudier la dérivabilité de Arccos et déterminer sa dérivée.

Exercice 9.4 Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Montrer que f admet une bijection réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.
3. Montrer que g est dérivable sur J et déduire du 2) sa dérivée.
4. Retrouver la valeur de g' en explicitant la fonction g.

Exercice 9.5 On suppose que f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, vérifie :

$$f' + f \geq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Dérivée n-ième

Exercice 9.6 Calcul de dérivée n-ième. Méthode
1. Déterminer la dérivée 2024-ième de $f(x) = \sqrt{1-x}$.
2. Soit $f : x \mapsto e^x \sin(x)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$
3. Montrer que $x \mapsto \sin^2(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses dérivées successives. On pourra utiliser que $sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
4. Montrer que $x \mapsto \dfrac{x^3+2x^2-4}{(1+x)^3}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et calculer ses dérivées successives.

Exercice 9.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a, b deux réels et f la fonction définie par :

$$f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$$

1. Soit $g : x \mapsto (x-a)^n$, montrer que : $\forall k \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g^{(k)}(x) = k!\binom{n}{k}(x-a)^{n-k}$$

où l'on utilise la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
2. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer $f^{(n)}(x)$.
3. Lorsque $a = b$, calculer $f^{(n)}(x)$ par une autre méthode.
4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Développements limités

Exercice 9.8 Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ telle que $f(x) \underset{x\to 0}{=} 3 - 2x + 3x^2 - x^3 + o(x^3)$. Donner $f(0)$ et $f''(0)$.

Exercice 9.9 Donner le $DL_4(0)$ de Arctan (formule de Taylor-Young)

Exercice 9.10 Déterminer les développements limités suivants :

(i) $DL_4(0)$ de $\sin(x)\sqrt{1+x^2}$, (ii) $DL_3(0)$ de $\dfrac{x+1}{x^2+x+2}$,

(iii) $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, (iv) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$,

(v) $DL_5(0)$ de $\ln(x^2+6)$, (vi) $DL_3(0)$ de $\exp(\mathrm{ch}(x))$.

Exercice 9.11 Déterminer les développements limités suivants :
(i) $DL_4(\frac{\pi}{3})$ de $\cos(x)$, (ii) $DL_3(2)$ de $\dfrac{x}{x-1}$, (iii) $DL_4(3)$ de $\ln(x)$.

Exercice 9.12 Calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{1-\cos(x)}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\big(\ln(1+x) + 1 - e^x\big)}{\sin(x) - x}$.

Exercice 9.13 Soit $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-x+2}$.
Montrer qu'aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, on a :

$$f(x) \underset{\pm\infty}{=} x + 3 - \frac{5}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En déduire que $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, admet une asymptote (D) en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser la position relative.

Exercice 9.14 Soient f de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}.$$

2. En déduire pour $x > 0$: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \left(\frac{(x+3h)(x+h)^3}{(x+2h)^3 x}\right)^{\frac{1}{h^3}}$.

Exercice 9.15 Étudier les asymptotes et la position de la courbe par rapport à ses asymptotes pour la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{4x^2-3x+2}$$

Exercice 9.16 *Primitivation*
1. Donner une équation différentielle vérifiée par th.
2. En déduire un $DL_5(0)$ de th.

Exercice 9.17 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} & \text{si } x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Calculer un $DL_2(0)$ de f.
2. Montrer que f est continue et dérivable en 0 et déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 9.18 Trouver un équivalent au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$.

Exercice 9.19 Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0;1]$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n = \left(\int_0^1 f(x)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\right)^n$$

1. On pose pour tout réel y, $\varphi(y) = e^y - y$. Donner le tableau de variations de φ. Montrer que pour tout réel y, $\varphi(y) \geq 1$.
2. Montrer que pour tout réel y, $\varphi(y) \leq \varphi(|y|)$.

3. Montrer qu'il existe un réel $M \geq 1$ tel que pour tout réel x de $[0;1]$

$$\frac{1}{M} \leq f(x) \leq M$$

4. Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1+\frac{\ln(f(x))}{n} \leq f(x)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\ln(f(x))}{n} + \exp\left(\frac{\ln(M)}{n}\right) - \frac{\ln(M)}{n}$$

5. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(f(x))\mathrm{d}x$. Montrer, en utilisant soigneusement les développements limites, que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^I.

Exercice 9.20 Trouver le développement limité des fonctions suivantes à l'ordre n indiqué en 0 :

1. $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $n=3$	**2.** $x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et $n=3$
3. $x \mapsto \cos^2(x)$ et $n=4$	**4.** $x \mapsto \sqrt{1+x}\ln(1+x)$ et $n=4$
5. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et $n=4$	**6.** $x \mapsto \exp(\cos(x))$ et $n=4$
7. $x \mapsto \tan(x)$ et $n=5$	**8.** $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ et $n=5$
9. $x \mapsto \cos^2(x+x^2)$ et $n=5$	**10.** $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ et $n=5$

Réponse :

1 et **2** Parité : $\frac{e^x+e^{-x}}{2} \underset{0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$ et $\frac{e^x-e^{-x}}{2} \underset{0}{=} x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

3 et **4** Produit : $\cos^2(x) \underset{0}{=} 1+-x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)$ et $\sqrt{1+x}\ln(1+x) \underset{0}{=} x-\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$

5 et **6** Composition : $\sqrt{1-x^2} \underset{0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$ et $\exp\big(\cos(x)\big) \underset{0}{=} e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4+o(x^4)$

7 et **8** Quotient : $\tan(x) \underset{0}{=} x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$ et $\dfrac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)$

9 et **10** Divers : $\cos^2(x+x^2) \underset{0}{=} 1-x^2-2x^3-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{3}x^5+o(x^5)$ et $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} \underset{0}{=} \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x^2-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^4+o(x^5)$.

Accroissements finis

Exercice 9.21 Établir l'égalité :

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[,\qquad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Faire une disjonction de cas suivant si $x>0$, $x<0$ ou $x=0$.

Exercice 9.22 Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$. Monter qu'il existe $x \in]0\,;1[$ tel que $4ax^3+3bx^2+2cx = a+b+c$.

Exercice 9.23 Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, impaire et telle que $f(2)=1$ et $f(-1)=2$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f''(c)=0$.

Exercice 9.24 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
1. Soit $m>0$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq a$, $f'(x) \geq m$. Montrer que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
2. On suppose que $f'(x) \to \lambda$ quand $x \to +\infty$, avec $\lambda > 0$ ou $\lambda = +\infty$. Montrer que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 9.25 Soit $a \in]0,1[$. **Méthode**
Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{a}{(n+1)^{1-a}} \leq (n+1)^a - n^a \leq \frac{a}{n^{1-a}}$$

En déduire l'équivalent suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-a}} \sim \frac{n^a}{a}$.

Exercice 9.26 Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, à dérivée décroissante.
1. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x+1)-f(x) \leq f'(x) \leq f(x)-f(x-1)$.
2. En déduire que si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f' tend vers 0 en $+\infty$.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9.27 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq x$.
1. Montrer que $f'(0) \geq 1$.
2. Montrer que, pour tout $x>0$, il existe $c \in]0,x[$ tel que $f'(c) \geq 1$.

Exercice 9.28 Classique
Soit $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$. On suppose qu'il existe $M \in [0,1[$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leq M$.
1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe (i.e. x tel que $f(x)=x$) dans $[a,b]$ qui sera noté ℓ.
3. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [a,b]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a,b]$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}-\ell| \leq M|u_n-\ell|$
   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\ell| \leq M^n|u_0-\ell|$.
   d) En déduire que la suite (u_n) converge et préciser la limite.
4. Application : étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1}=\cos(u_n)$.

Exercice 9.29 *Théorème de Darboux*
Soit $f \in \mathcal{D}(I)$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous allons montrer que la dérivée f' vérifie la propriété de la valeur intermédiaire, c'est-à-dire :

$$\forall(\alpha,\beta) \in f'(I)^2,\ \text{avec } \alpha<\beta, \quad \forall\gamma \in]\alpha,\beta[, \quad \exists t \in {f'}^{-1}(]\alpha,\beta[);\ \ f'(t)=\gamma$$

Soit $(\alpha,\beta) \in f'(I)^2$, avec $\alpha<\beta$ et $\gamma \in]\alpha,\beta[$. Considérer $g : x \mapsto f(x)-\gamma x$.
1. Montrer que g n'est pas strictement monotone.
2. En déduire qu'il existe $c,d \in I$ avec $c<d$ tel que $g(c)=g(d)$.
3. En déduire qu'il existe $t \in I$, $f'(t)=\gamma$.

Convexité

Exercice 9.30 En utilisant la concavité de la fonction sinus sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, montrer que $\forall\ x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 9.31 Soit f une fonction bornée et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée seconde positive. Montrer que f est décroissante.

Exercice 9.32 Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Soient $n \geq 2$, $x_1,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^*$, montrer les inégalités $m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_q$.

$$m_a = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \qquad m_q = \sqrt{\frac{(x_1)^2+\cdots+(x_n)^2}{n}}$$
$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \qquad m_g = (x_1\dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 9.33
Montrer que, pour tout $x>0$ et pour tout $t \in]0,1[$, $x^t \leq tx+1-t$.

Exercice 9.34 Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$

Exercice 9.35
1. Montrer que, si f est à valeurs strictement positives sur un intervalle I, et si la fonction $\ln\circ f$ est convexe, alors, f est convexe.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9.36 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ convexe, croissante et non constante. Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 9.37 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln(1+x^2)$.
1. Réduire le domaine d'étude de f.
2. Étudier les variations de f et précisez les limites aux bornes.
3. Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$. En déduire la nature de la branche infinie.
4. Étudier la convexité de f et calculer les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
5. Tracer la courbe représentative de f en donnant les tangentes en 0 et aux points d'inflexion.
