Arithmétiques des entiers relatifs
Exercices

Divisibilité

Exercice 10.1 Déterminer les triplets d'entiers naturels consécutifs tel que leur produit est un carré parfait ?

Exercice 10.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer :

1. Si $2n+1$ est un carré d'entiers, alors $n+1$ est la somme de deux carrés d'entiers consécutifs.
2. Si $3n+1$ est un carré d'entiers, alors $n+1$ est la somme de trois carrés d'entiers.

Exercice 10.3 Soit p un nombre premier autre que 2. Montrer $p^2 \equiv 1[8]$.

Exercice 10.4 *Développement décimal périodique*
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x_0, x_1x_2 \dots x_n \dots$ son écriture décimale avec $x_0 = \lfloor x \rfloor$.
On dit qu'une période apparait dans l'écriture décimale lorsque d'une séquence (finie) de décimales consécutives se répètent indéfiniment dans l'écriture décimale d'un nombre.
On le note en surlignant la séquence. Par exemple :

$$a = 3.4212121212\dots1212\dots = 3.4\overline{21}$$
$$b = 1.333333\dots333\dots = 1.\overline{3}$$

1. Montrer que a est un rationnel.
2. Montrer que x est un rationnel si et seulement si son écriture décimale possède une période.

Exercice 10.5 **Méthode**

On calcule le PGCD par l'algorithme d'Euclide avec : $a \wedge b = (a - qb) \wedge b$.

Calculer le PGCD et le PPCM des couples :

$$(558, -165672) \qquad (n-1, n+1) \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$
$$(51, 438) \qquad (n^2+1, n(n^2-1)), \text{ où } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$
$$(n^4-1, n^6-1), \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 10.6 Montrer que $m^2 + n^2$ est divisible par 7 si et seulement si m et n sont divisibles par 7.

Exercice 10.7 Résoudre : $(i)\ \ 6x \equiv 5\ [7]$ $\quad (iv)\ \ 5x \equiv 4\ [12]$
$(ii)\ \ 6x \equiv 3\ [14]$ $\quad (v)\ \ 39x \equiv 2\ [55]$
$(iii)\ \ 6x \equiv 4\ [14]$ $\quad (vi)\ \ 35x \equiv 14\ [56]$

Exercice 10.8 Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la fraction $\dfrac{21m+4}{14m+3}$ est une fraction irréductible.

Exercice 10.9
Calculer le reste de la division euclidienne de 2023^{2024} par 7.

Exercice 10.10 Quel est le dernier chiffre en base 10 de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?

Exercice 10.11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$(15n^2 + 8n + 6) \wedge (30n^2 + 21n + 13)$$

Exercice 10.12 Un entier congru à 7 modulo 8 peut-il être somme de trois carrés ?

Exercice 10.13 Soit x un réel quelconque ; dire si les assertions suivantes sont vraies :

1. $x \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \in \mathbb{Q}$ et $x^6 \in \mathbb{Q}$
2. $x \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad x^5 \in \mathbb{Q}$ et $x^7 \in \mathbb{Q}$

Exercice 10.14 Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant :

$$a \wedge b = 5 \text{ et } a \vee b = 8160 \qquad a \vee b - a \wedge b = 77$$
$$a \wedge b = 13 \text{ et } a \vee b = 286 \qquad a \vee b + 11a \wedge b = 203$$
$$a \wedge b = 6 \text{ et } a \vee b = 27720$$

Primalité

Exercice 10.15 *Nombres de Mersenne*

1. Le nombre $2^{11}-1$ est-il premier ?

2. Soit $a, n \geq 2$.
Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors n est premier et $a = 2$.
Remarque : Les nombres de Mersenne sont les nombres de la forme $2^n - 1$. La quête de grands nombres premiers est effectuée sur les nombres de Mersenne. Le plus grand connu date de décembre 2018 : $2^{82\ 589\ 933} - 1$.
Il possède 24 862 048 chiffres (en base 10)

Exercice 10.16
On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n le n-ième nombre premier ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...). Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n \leq 2^{2^{n-1}}$$

Exercice 10.17 Soit $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ la suite des nombres premiers consécutifs. La suite $u_k = p_k - p_{k-1}$ est-elle bornée ?
Autrement dit, est-il possible de construire une suite d'entiers composés consécutifs de longueur arbitrairement grande ?

Théorème de Gauss

Exercice 10.18 Montrer que $a \wedge b = 1$ si et seulement si $(ab) \wedge (a+b) = 1$.

Exercice 10.19 *Équation diophantienne*
Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. On s'intéresse à la résolution de l'équation

$$\mathcal{E}: \qquad ax + by = c$$

1. Supposons a et b premiers entre eux.
 a) Établir l'existence d'un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de $\mathcal{E}$.
 b) Montrer que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + kb$ et $y = y_0 - ka$.
 c) Donner l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$.
 d) Résoudre $32x + 21y = 5$.
2. On pose $d = a \wedge b$.
 a) Donner un CNS sur c pour que $\mathcal{E}$ admette une solution.
 b) Considérant $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de $\mathcal{E}$, en déduire l'ensemble solution de $\mathcal{E}$.
 c) Résoudre $33x + 21y = 6$.

Exercice 10.20 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $\quad 51x + 44y = 1$

Exercice 10.21 Un touriste achète du vin rouge et du vin blanc. Il dépense en tout 1000 euros. Chaque bouteille de vin rouge coûte 19 euros, et chaque bouteille de vin blanc en coûte 13. Combien le touriste a-t-il de bouteilles de chaque sorte, sachant qu'il a plus de vin rouge que de vin blanc ?

Exercice 10.22 *Lemme Chinois*
On se propose de résoudre $(\mathcal{S})$ $\quad \begin{cases} x \equiv 5\ [8] \\ x \equiv 1\ [27] \end{cases}$

1. Donner la relation de Bézout du couple $(8, 27)$.
2. Déterminer x_1 une solution particulière du système $\begin{cases} x \equiv 1\ [8] \\ x \equiv 0\ [27] \end{cases}$
3. Déterminer x_2 une solution particulière du système $\begin{cases} x \equiv 0\ [8] \\ x \equiv 1\ [27] \end{cases}$
4. En déduire x_0 une solution particulière de $(\mathcal{S})$.
5. Que dire de $x - x_0$ si x et x_0 sont des solutions de $(\mathcal{S})$.
6. Donner l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$.
7. Proposer une généralisation pour le système suivant où les (p_i) sont premiers entres eux deux à deux.

$$\left\{ x \equiv a_i\ [p_i]; i \in [\![1, n]\!] \right.$$

8. Résoudre $\begin{cases} x \equiv 5\ [8] \\ x \equiv 1\ [27] \\ x \equiv 1\ [11] \end{cases}$

Exercice 10.23 Résoudre $\begin{cases} x \equiv 3\ [15] \\ x \equiv 7\ [23] \end{cases}$

Exercice 10.24 Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.
Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Valuation p-adique

Exercice 10.25
1. Dresser la liste des cubes modulo 13.
2. Soient (n, m, p) trois entiers tels que :

$$5n^3 + 11m^3 + 13p^3 = 0$$

Montrer que 13 divise n, m et p.
3. L'équation d'inconnues $(n, m, p) \in (\mathbb{Z}^*)^3$:

$$5n^3 + 11m^3 + 13p^3 = 0$$

a-t-elle des solutions ?

Exercice 10.26 Combien de zéros terminent l'écriture de 2023!.

Exercice 10.27 Le nombre $\binom{1000}{500}$ est-il divisible par 7 ?

Exercice 10.28 *Nombre de diviseurs d'un entier naturel non nul*
Dans tout l'exercice, les nombres considérés sont des entiers naturels, en particulier les diviseurs d'un nombre seront toujours ses diviseurs positifs. On note $D(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier naturel n ($n \geq 1$).

1. Donner la liste des diviseurs de n et calculer $D(n)$ lorsque $n = 8$, puis lorsque $n = 72 = 2^3 3^2$.
2. Soit un entier naturel $n \geq 2$, décomposé en produit de facteurs premiers sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$, où $\alpha_i \geq 1$ et les p_i premiers distincts. Démontrer que $D(n) = (\alpha_1 + 1)...(\alpha_k + 1)$.
3. Quel est le plus petit entier naturel ayant exactement 17 diviseurs ? ayant exactement 12 diviseurs ?
4. Montrer que l'entier n est un carré parfait si et seulement si $D(n)$ est impair.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{D(n)}$ est un carré parfait.

Petit théorème de Fermat

Exercice 10.29 Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}$, $n^5 - n$ est divisible par 30.

Exercice 10.30
Montrer que si p est premier, différent de 2 et 5, il divise au moins un des nombres de l'ensemble $\{1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots\}$.

Exercice 10.31 Montrer qu'il existe un multiple de 2019 dont l'écriture décimale ne comporte que le chiffre 3.

Exercice 10.32 *Petit théorème d'Euler*
Soit p, q deux nombres premiers distincts.
1. Montrer que si a est premier avec p et q, alors

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[pq]$$

2. Généralisation : Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$a^{k(p-1)(q-1)+1} \equiv a[pq]$$

Exercice 10.33 *Chiffrement RSA*
Les services de contre-espionnage ont découvert que l'agent secret Alice utilise la méthode suivante pour coder ses messages : il code son message en chiffres par une numérotation alphabétique ressemblant au code ASCII : A=01, B=02, ... ; il obtient un nombre qu'il découpe en groupes de six chiffres en commençant par la gauche ; puis il élève chaque groupe à la puissance 11 et prend le reste du résultat dans la division par 364807. Ils ont intercepté le message 233191, 151339, 33429, 208007, 208007, 296613, 244350, 204987, 348938, 149013, 208007, 106733, 156046, 29280, 105400, 123272, 223128, 19467, 149805. Quelle est sa signification ?