

# Structures algébriques – Exercices

## Loi de composition interne

**Exercice 11.1**  $(G, +)$  est un groupe ayant quatre éléments  $a, b, c$  et  $d$ . On donne quelques informations sur la table de la loi "+":

$+$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$d$	$c$		
$b$	$c$			
$c$			$c$	
$d$	$b$			

Quel est l'élément neutre du groupe? Compléter la table (en justifiant la façon de faire).

**Exercice 11.2** Soient  $E$  un ensemble muni d'une relation d'ordre total,  $\leq$ .

1. Montrer que  $(E, \max)$  est un magma associatif et commutatif.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante  $(E, \max)$  possède un élément neutre.
3. Le cas échéant, quels sont les éléments inversibles?

## Structure de groupe

### Exercice 11.3

Montrer que  $(\{x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}, \circ)$  est un groupe.

**Exercice 11.4** Soit  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $B = A^2$ ,  $C = A^3$ ,  $A + C$  et  $U = A^4$ .
2. Montrer que  $(\{U, A, B, C\}, \times)$ , où  $\times$  est le produit matriciel, forme un groupe commutatif.

**Exercice 11.5** Soit  $E$ , un ensemble ayant au moins trois éléments. Montrer que  $\mathcal{S}_E$  est non commutatif.

**Exercice 11.6** Soit  $(G, \times)$  un groupe. On note  $e$  l'élément neutre et on suppose que :

$$\forall x \in G, \quad x^2 = e$$

Montrer que  $G$  est commutatif.

## Structure de sous-groupe

**Exercice 11.7** On appelle groupe monogène, tout groupe qui peut être engendré par un seul élément.

1. Montrer que tout sous-groupe  $G$  de  $(\mathbb{Z}, +)$  est monogène, c'est-à-dire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $G = n\mathbb{Z}$ .
2. Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Montrer que  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  est un sous groupe de  $\mathbb{Z}$  et identifier  $c \in \mathbb{N}$  tel que

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$$

**Exercice 11.8** Soit  $(G, \times)$  un groupe et  $H \subset G$  une partie finie non vide et stable par produit.

Montrer  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

### Exercice 11.9 Théorème de Lagrange

Soit  $(G, \times)$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ .

On définit une relation sur  $G$  par, pour tout  $(x, y) \in G^2$  :

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists h \in H \text{ tel que } x = h \times y)$$

1. Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence.
2. Montrer que les classes d'équivalences sont toutes en bijection.
3. En déduire le théorème de Lagrange : *L'ordre de tout sous groupe  $H$  d'un groupe  $G$  divise l'ordre du groupe.*

**Vocabulaire :** l'ordre d'un groupe est le nombre d'éléments du groupe.

**Structure d'anneau****Exercice 11.10**

Montrer que  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib; a, b \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .  
Déterminer  $U(\mathbb{Z}[i])$ .

**Exercice 11.11**

1. Prouver que  $5^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{Q}$
2. Prouver que

$$\mathbb{A} = \left\{ x + 5^{\frac{1}{3}}y \mid (x, y) \in \mathbb{Q} \right\}$$

n'est pas un sous anneau de  $(\mathbb{R}, +, \times)$  en constatant que  $5^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{A}$  et  $5^{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{A}$ .

**Exercice 11.12** L'anneau  $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$  est-il intègre ? Déterminer  $U(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$ .

**Exercice 11.13** Soit  $(\mathbb{A}, +, \times)$  un anneau. On dit que  $x \in \mathbb{A}$  est un élément nilpotent s'il existe un entier  $n$  tel que  $x^n = 0$ .

1. Quels sont les éléments nilpotents si  $\mathbb{A}$  est intègre ?
2. Soit  $x, y \in \mathbb{A}$  deux éléments nilpotents qui commutent. Montrer que  $x + y$  et  $x \times y$  sont nilpotents.
3. Soit  $x \in \mathbb{A}$  un élément nilpotent, montrer que  $1 - x$  est inversible.

**Exercice 11.14** Soit  $E$  un ensemble. Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$ , on appelle différence symétrique de  $A$  et  $B$  et on note  $A\Delta B$  la partie :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau commutatif.
2. Donner une CNS sur  $E$  pour que ce soit un corps.
3. Soit  $F \subsetneq E$ ,  $(\mathcal{P}(F), \Delta, \cap)$  est un sous-anneau de  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  ?

**Structure de corps**

**Exercice 11.15** Soit  $\mathbb{B} = \left\{ x + y\sqrt{5} \mid (x, y) \in \mathbb{Q} \right\}$

1. Montrer que pour  $x, y \in \mathbb{Q}$ ,

$$x + y\sqrt{5} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x^2 - 5y^2 = 0$$

2. Montrer que  $\mathbb{B}$  est un sous-anneau de  $(\mathbb{R}, +, \times)$ .
3. Est que  $\mathbb{B}$  est un corps ?

**Exercice 11.16** Soit  $(\mathbb{A}, +, \times)$  un anneau commutatif, intègre et fini. Montrer que  $\mathbb{A}$  est un corps.

**Exercice 11.17** Déterminer tous les sous-corps de  $\mathbb{Q}$ .

**Morphisme**

**Exercice 11.18** Soit  $G$  un groupe tel que  $\varphi : x \mapsto x^2$  soit un morphisme. Montrer que  $G$  est commutatif.

**Exercice 11.19**

Soit  $G$  un groupe tel que  $\varphi : x \mapsto x^3$  soit un morphisme surjectif.

1. Soit  $a, b \in G$ , simplifier  $\varphi(aba^{-1})$ .
2. En déduire que pour tout  $x \in G$ ,  $x^2$  commutent avec tout les éléments de  $G$ .
3. Montrer que  $G$  est commutatif.

**Exercice 11.20** Soient  $(G, \cdot)$  un groupe et  $f$  une bijection de  $G$  dans  $G$ . Considérons l'application :

$$* : (x, y) \mapsto x * y = f^{-1}(f(x) \cdot f(y))$$

Montrer que  $(G, *)$  est un groupe.

**Exercice 11.21** ❄️❄️ Déterminer tous les morphismes de l'anneau  $\mathbb{R}$ .