Polynômes et fractions rationnelles Exercices

Anneau des polynômes

Exercice 12.1 Déterminer les fonctions polynômiales réelles non nulles qui sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$x^2(1+x)y'' + x(1-x)y' - y = 0$$

Exercice 12.2 *Équations fonctionnelles*
Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$: (1) $p \circ p = p$ (2) $p'^2 = 4p$

Divisibilité

Exercice 12.3 Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B lorsque :
1. $A = 2X^3 - 4X^2 + 3X - 1$ et $B = X + 1$.
2. $A = X^4 - iX^3 + (1+i)X^2 - X + 2$ et $B = X^2 - i$.
3. $A = X^2 + 3X - 1$ et $B = X^3 + 1$.

Exercice 12.4
1. Soit $\lambda = 1 + \sqrt[3]{2}$. Déterminer B, un polynôme à coefficient entier de degré 3, unitaire, dont λ est racine.
2. Soit $A = X^4 - X^3 - 3X^2 + 3X - 4$. Effectuer la division euclidienne de A par B.
3. Calculer $A(\lambda)$.

Exercice 12.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Classique

On désirer calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
1. Calculer $A^2 - 5A + 4I_3$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de A et de I_3.

Exercice 12.6 Déterminer le reste R de la division euclidienne Classique
1. de $(X-1)^n$ $(n \geq 2)$ par $X^2 - X - 2$
2. de X^n $(n \geq 2)$ par $(X-a)^2$ $(a \in \mathbb{C}^*)$
3. de $A_n = (X\sin(a) + \cos(a))^n$ par $B = 1 + X^2$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12.7
Pour quels $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $(1+X^4)^n - X^n$ est-il divisible par $1 + X + X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Racines et factorisation

Exercice 12.8 Soit a, b et c trois réels non nuls et deux à deux distincts. On définit deux polynômes A et B par :

$$A(X) = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-a)(X-c)}{b(b-a)(b-c)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$
$$B(X) = 1 + \frac{1}{abc}\Big(\big(X-a\big)\big(X-b\big)\big(X-c\big)\Big)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 12.9 Soient P et Q deux polynômes réels non nuls de degrés respectif p et q et de coefficients dominants respectifs a et b.
1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ est définie à partir d'un certain rang.
2. Déterminer la limite éventuelle de cette suite en fonction de p, q, a et b.

Exercice 12.10 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
1. Montrer que si $Q \in \mathbb{C}[X]$ divise P alors toute racine de Q est aussi une racine de P.

2. Montrer par contraposition que si P' divise P alors P ne peut avoir deux racines distinctes.
3. Identifier tous les polynômes tel que P' divise P.

Exercice 12.11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les racines du polynôme

$$P_n = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$$

Exercice 12.12 Soit $P = (X+1)^n - X^n - 1$.
1. Montrer que P possède un racine multiple si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} (x+1)^n - x^n - 1 & = 0 \\ n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1} & = 0 \end{cases}$$

2. Déterminer les valeurs de n tel que P possède une racine multiple.

Exercice 12.13 Classique
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit T_n et U_n par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \\ \sin(\theta) U_n(\cos(\theta)) = \sin(n\theta) \end{cases}$$

1. En admettant que T_n et U_n sont des polynômes, prouver que T_n et U_n sont uniques.
2. En développant $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ par la formule du binôme de Newton, démontrer l'existence de T_n et U_n.

Remarque : : T_n est appelé n-ième polynôme de Tchébychev de première espèce et U_n est appelé n-ième polynôme de Tchébychev de deuxième espèce.

3. Donner T_0 et T_1.
Écrire $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et en déduire T_2 et T_3.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos\left((n+1)\theta\right) + \cos\left((n-1)\theta\right)$ en fonction de $\cos(n\theta)$ et $\cos(\theta)$. En déduire que, pour $n \geq 1$,

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

Donner T_4 et T_5.
5. Montrer que T_n est de degré n et donner son coefficient dominant.
6. Déterminer la parité de T_n en établissant par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \quad T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $2XU_n - U_{n-1}$ et U_{n+1}. Que vaut $\left(1 - X^2\right) U_n^2 + T_n^2$?
8. Trouver les racines de T_n pour $1 \leq n \leq 3$,
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la relation de définition, calculer les racines de T_n qui appartiennent à $[-1, 1]$. Montrer que l'on obtient ainsi toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$. En déduire la décomposition de T_n en produit de facteurs irréductibles
10. En déduire le calcul de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)$

Exercice 12.14 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et, éventuellement, dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} P_1 &= X^8 + X^4 + 1 \\ P_2 &= X^6 - i \\ P_3 &= X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1 \\ P_4 &= (X+1)^7 - X^7 \end{aligned}$$

Exercice 12.15 Déterminer λ et μ complexes pour que

$$P = X^4 + 4X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$$

admette -1 comme racine double. Factoriser P.

Relations coefficients-racines

Exercice 12.16 *Racines rationnelles d'une polynôme à coefficients entiers*
1. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_i X \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n.
Donner une condition nécessaire sur a_0, a_n et $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ pour que $\dfrac{p}{q}$ soit une racine de P.

2. Appliquer le critère obtenu pour trouver une racine *évidente* de $P = 2X^4 - 7X^3 + 5X^2 - 7X + 3$.

Exercice 12.17
Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ telles que $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$ et $x_2 + x_3$ sont non nuls. On note :

$$S = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}$$

Donner l'expression de S en fonction de a, b et c.

Exercice 12.18 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système d'inconnues x, y, z suivant :

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} & = & 1 \end{cases}$$

Polynôme de Lagrange

Exercice 12.19 *Méthode de Simpson*
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$.
1. Déterminer un polynôme P de degré 2 qui interpole f en a, b et $\dfrac{a+b}{2}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)\mathrm{d}t = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

Remarque : La méthode de Simpson utilise ce résultat pour approximer une intégrale de f.

Exercice 12.20 Déterminer tous les polynômes P tel que les restes des divisions euclidiennes de P, élément de $\mathbb{R}[X]$, par $X-1$, $X-2$ et $X-3$ sont respectivement 3, 7 et 13.

Arithmétiques

Exercice 12.21 Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Montrer que A et B sont premiers entre eux si et seulement si $A + B$ et AB le sont.

Exercice 12.22 Déterminer le pgcd (et le ppcm) des polynômes P et Q dans les deux cas suivants :
1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$.
2. $P = X^3 + iX^2 + 4X + 4i$ et $Q = X^3 + 3X - 2i$.

Exercice 12.23 Donner une relation de Bezout associée à

$$P = X^4 - X^3 + X^2 - X \text{ et } Q = X^3 + 2X^2 + X + 2$$

Exercice 12.24 Identifier tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $X^2 - 2$ divise $P - X$ et $X + 3$ divise $P - 2$.

Fractions rationnelles

Exercice 12.25 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$F_1 = \frac{X^3}{(X^2-1)(X-2)} \qquad F_2 = \frac{(X^2 - X + 1)^2}{X^2(X-1)^2}$$

$$F_3 = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} \qquad F_4 = \frac{X^6}{(X-2)(X+1)^2}$$

Exercice 12.26 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis en déduire leurs décompositions sur $\mathbb{R}$:

$$F_1 = \frac{X^4}{(X^2+1)(X-1)} \qquad F_2 = \frac{X^5}{X^4 - 1}$$

$$F_3 = \frac{X}{(X^2 + X + 1)(X+1)^3} \qquad F_4 = \frac{X^6}{(X^2+1)(X-1)^3}$$

Exercice 12.27 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$F_1 = \frac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2} \qquad F_2 = \frac{X}{(X^4+X^2+1)}$$
$$F_3 = \frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2} \qquad F_4 = \frac{X^5-X^2+1}{(X^2+1)^2\left(X+1\right)^2}$$

Exercice 12.28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fraction :

$$F = \frac{nX^{n-1}}{X^n-1}$$

puis en déduire celle de : $G = \dfrac{nX^{2n-2}+n(n-1)X^{n-2}}{(X^n-1)^2}$

Exercice 12.29 Déterminer la DES dans $\mathbb{R}[X]$ de $\dfrac{1}{X^{2n}-1}$.

Exercice 12.30 *Théorème de Lucas*
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines $a_1, a_2, \ldots, a_k$ avec les multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
1. Considérant $(f_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ des fonctions dérivables. Montrer que

$$\left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{k}\left(f_i'\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} f_j\right)$$

2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$. **Prog**

3. En déduire que pour tout racine a de P' il existe k réels $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$ tels que :

$$\forall i \in [\![1,k]\!], \quad \lambda_i \geq 0, \quad 1 = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \text{ et } a = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i$$

On dit que a est barycentres à coefficients positifs de $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

4. Interpréter géométriquement le résultat précédent lorsque :
- $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant exactement deux racines qui sont réelles ;
- $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant toutes ses racines réelles ;

⇛ Exemples de développement en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{X^4+X}{(X-1)^3} = X+3+\frac{6}{X-1}+\frac{5}{(X-1)^2}+\frac{2}{(X-1)^3}$$
$$\frac{X^2+1}{(X-1)^2X^3} = \frac{4}{X}+\frac{2}{X^2}+\frac{1}{X^3}-\frac{4}{X-1}+\frac{2}{(X-1)^2}$$
$$\frac{X-1}{(X^2+2)^2X} = -\frac{1}{4X}+\frac{X}{4(X^2+2)}+\frac{2+X}{2(X^2+2)^2}$$

Exemples de développement en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{X}{(X+1)(X+i)^2} = -\frac{i}{2(1+X)}+\frac{i}{2(X+i)}+\frac{1-i}{2(X+i)^2}$$
$$\frac{i+(1+i)X}{(X^2+1)^2} = -\frac{1}{4(X+i)}-\frac{1}{4(X+i)^2}+\frac{1}{4(X-i)}+\frac{1-2i}{4(X-i)^2}$$

Exemples de développement en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{2X^5}{(X^2+1)^2} = 2X-\frac{2}{X+i}+\frac{i}{2(X+i)^2}-\frac{2}{X-i}-\frac{i}{2(X-i)^2}$$
$$= 2X-\frac{4X}{X^2+1}+\frac{2X}{(X^2+1)^2}$$
$$\frac{X+1}{(X^2-2X+2)(X-1)^2} = \frac{1}{X-1}+\frac{2}{(X-1)^2}-\frac{1+2i}{2(X-1+i)}-\frac{1-2i}{2(X-1-i)}$$
$$= \frac{1}{X-1}+\frac{2}{(X-1)^2}-\frac{1+X}{X^2-2*X+2}$$