

# Dénombrement – Exercices

**Exercice 13.1** On lance 3 pièces ensemble 100 fois de suite et on compte le nombre de *face* sorti : pour la pièce A *face* est sorti 70 fois, pour B 50 fois et pour C 56 fois. *Face* est sorti simultanément pour A et B 31 fois, pour B et C 28 fois.

Montrer que *face* est sorti simultanément pour A, B et C au moins 9 fois, et *pile* au plus 11 fois.

**Exercice 13.2** Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) tirages successifs sans remise d'une boule et on note le numéro. On obtient ainsi une liste de  $k$  nombres.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Combien de suites croissantes peut-on obtenir ?

**Exercice 13.3** Une société de voyage propose à ses clients le tour de l'Europe en 8 jours. Il s'agit de visiter 4 capitales européennes en passant deux jours dans chaque ville. Les capitales sont à choisir parmi Rome, Paris, Londres, Amsterdam, Madrid, Prague et Budapest.

Combien y-a-t-il de circuits possibles ?

**Exercice 13.4** Déterminer le nombre de numéros de téléphone à 10 chiffres tels que :

1. le numéro est formé avec deux 1, deux 3 et six 7,
2. le numéro est formé avec deux chiffres distincts et deux seulement,
3. le numéro comporte trois 1 et trois seulement.

**Exercice 13.5** On tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :

1. exactement trois cœurs,
2. au plus trois cœurs,
3. au moins trois cœurs,

4. exactement trois dames et au moins deux piques,

## Exercice 13.6

1. On dispose dix livres sur une étagère.

De combien de façons peut-on les ranger ?

2. Parmi les dix livres, il y a trois livres de maths et quatre romans. Les livres de maths sont rigoureusement identiques, les autres livres sont 2 à 2 distincts. De combien de façon peut-on les ranger si on souhaite que les romans soient côte à côte ? Et si on impose en plus que les livres de maths soient côte à côte ?

**Exercice 13.7** Soit  $E$  l'ensemble des mots de 9 lettres.

1. Déterminer le cardinal de  $E$ .
2. Déterminer le nombre de mots de  $E$  contenant exactement 4 fois la lettre  $a$ .
3. Déterminer le nombre de mots de  $E$  contenant exactement 2 fois la lettre  $a$  et 2 fois la lettre  $b$ .
4. Déterminer le nombre de mots de  $E$  pour lesquels 2 lettres distinctes se répètent chacune au moins 4 fois.
5. Déterminer le nombre de mots de  $E$  pour lesquels au moins 2 lettres distinctes se répètent.

## Exercice 13.8

La société Le hazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Une fonction aléatoire place au hasard trois jetons, notés ★, dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Exemple :

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les ensembles  $H, V, D, N$  par :

- $H$  : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- $V$  : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- $D$  : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- $N$  : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons.
2. Déterminer le cardinal des ensembles  $H$ ,  $V$ ,  $D$ .
3. En déduire le cardinal de  $N$ .

**Exercice 13.9** Dans une assemblée, il y a  $n$  hommes et  $p$  femmes. On doit choisir un bureau comprenant  $a$  personnes ( $1 \leq a \leq n + p$ )

1. Combien y-a-t-il de bureaux comprenant  $i$  hommes et  $a - i$  femmes ?
2. En déduire

$$\sum_{i=0}^a \binom{n}{i} \binom{p}{a-i} = \binom{n+p}{a}$$

en adoptant la convention  $\binom{n}{k} = 0$  si  $k < 0$  ou  $k > n$ .

3. En déduire

$$\sum_{i=0}^n i(i-1) \binom{n}{i}^2 = n(n-1) \binom{2n-2}{n}$$

**Exercice 13.10** Soit  $E$  un ensemble fini, calculer :

$$S_1 = \sum_{ACE} \text{Card}(A), \quad S_2 = \sum_{A, B \subset E} \text{Card}(A \cap B), \quad S_3 = \sum_{A, B \subset E} \text{Card}(A \cup B)$$

**Exercice 13.11** Une "main" est un sous-ensemble d'un jeu de cartes. Avec un jeu de 52 cartes, combien peut-on former de mains de 8 cartes contenant :

1. le roi de cœur ;
2. au moins un roi ;
3. exactement un roi et un cœur ;
4. 2 cœurs et 6 piques ;
5. 2 cartes d'une couleur et 6 d'une autre
6. 4 couleurs : carreau, cœur, pique, trèfle.

**Exercice 13.12** Tirage sans ordre, avec répétition

Combien y a-t-il de façon de ranger  $p$  boules objets indiscernable dans  $n$  tiroirs ?

**Exercice 13.13** Permutation de  $\{1, 2, \dots, 12\}$

Combien y a-t-il de bijections  $f$  de  $\{1, 2, \dots, 12\}$  dans lui-même vérifiant :

1. la propriété ;  $n$  est pair  $\Rightarrow f(n)$  est pair ?
2. la propriété ;  $n$  est divisible par 3  $\Rightarrow f(n)$  est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions en remplaçant *bijection* par *application*.

**Exercice 13.14**

Nous considérons 10 nombres entiers (aléatoirement choisis) entre 1 et 100. Montrer qu'il est possible, en utilisant ces nombres au plus une fois, d'écrire deux sommes égales.

**Exercice 13.15** Au loto sportif, le parieur remplit une grille dans laquelle il indique ses prévisions pour treize matchs de football à venir. Pour chaque match, il peut cocher au choix trois cases : "1" pour une victoire de l'équipe 1, "2" pour une victoire de l'équipe 2, et "N" pour un match nul. A l'issue d'un match une et une seule de ces trois réponses sera réalisée.

1. De combien de façons un parieur peut-il remplir la grille ?
2. Dénombrer les grilles pour lesquelles à l'issue des matchs :
  - a) toutes les réponses sont exactes.
  - b) toutes les réponses sont fausses.
  - c) exactement trois réponses sont exactes.
3. Pour gagner, il faut avoir coché au moins dix réponses exactes. Quel est le nombre de grilles gagnantes ?

**Exercice 13.16** A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres A, B et C, et les neuf chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composée d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres. Par exemple A 1789.

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien y a-t-il de codes
  - a) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
  - b) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
  - c) pour lesquels les quatre chiffres sont différents ?
  - d) pour lesquels les quatre chiffres distincts sont dans l'ordre croissant ?