

# Espaces vectoriels – Exercices

## SOUS-ESPACES VECTORIELS

**Exercice 14.1** Dire si les sous-ensembles sont des sous-e.v. ?

1. les polynômes de degré 2
2.  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y = 0, z + 3t = 0\}$
3. les fonctions  $f$  telles que  $f(1) = 2f(0)$
4.  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; f(1) - f(0) = 1\}$
5.  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + xf'(x) - 2f(x) = 0\}$

### Exercice 14.2

#### Méthode

→ Une méthode pour détermination de  $F \cap G$  :

- Mettre un espace sous la forme  $\text{Vect}(\dots)$
- Mettre l'autre sous la forme d'un ensemble de vecteurs de  $E$  vérifiant une propriété.
- Déterminer  $F \cap G$  en cherchant à quelle condition un vecteur quelconque du premier vérifie la propriété du second.

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \quad G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer  $F \cap G$ .

**Exercice 14.3** Il y a deux façons de définir un sous-ensemble :

- forme 1 : les éléments sont définis explicitement à l'aide de paramètres,
- forme 2 : les éléments sont définis par une propriétés, souvent des équations vérifiées par leurs coordonnées.

1. Soit  $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ x + 3y - z - t = 0 \end{cases} \right\}$ . Mettre  $F$  sous la forme 1.
2. Soit  $H = \text{Vect}((1, -1, 0, 3), (2, 1, 1, -2))$ . Mettre  $H$  sous la forme 2.

## FAMILLES DE VECTEURS

### Exercice 14.4 Indépendance linéaire

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées dans l'espace indiqué :

1. Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{F}_1 = ((1; 2), (3; 4), (0; 0))$ ,  $\mathcal{F}_2 = ((1; 2), (-3; -6))$ .
2. Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{F}_3 = ((1; -3; 5), (1; 0; 2), (1; -6; 8))$ .

### Exercice 14.5

Montrer que  $\{(1, 2, -1, 2), (2, 3, 0, -1), (1, 3, -1, 0), (1, 2, 1, 4)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$  et donner les coordonnées du vecteur  $(5, 7, 1, 4)$  dans cette base.

### Exercice 14.6

Soit  $(u, v, w)$  une famille libre dans  $E$ , un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. La famille  $(u + v, v + w, u + w)$  est-elle libre ?

**Exercice 14.7** On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+2} = 2\sqrt{2}u_{n+1} + 4u_n$ .

1. Identifier le type de la suite et en donner une expression explicite.
2. En déduire qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles que  $\mathcal{S} = \text{Vect}(a, b)$ .
3. La famille  $\{a, b\}$  est-elle libre ? En déduire une base de  $\mathcal{S}$ .

### Exercice 14.8

#### Méthode

Soit  $r$  un réel non nul. Montrer que les suites  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(nr^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(n^2r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une famille libre de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

### Exercice 14.9

#### Méthode

- Raisonnement par l'absurde pour montrer la liberté d'une famille  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  :
- Introduire une combinaison linéaire formelle nulle des vecteurs : soit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  avec  $\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = 0_E$
  - Poser  $k_0 = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket; \alpha_k \neq 0\}$
  - Montrer que  $\alpha_{k_0} = 0$  et conclure.

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $r_1, r_2, \dots, r_n$  des réels tels que  $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n$ , et  $f_1, f_2, \dots, f_n$  les fonctions définies par  $f_i : x \mapsto \exp(r_i x)$ . Montrer que  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  est une famille libre de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 14.10** Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que  $(1, 1 + X, 1 + X + X^2)$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$  et donner les coordonnées de  $P = e + fX + gX^2$  dans cette base.

2. Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  tel que  $a \neq b$ . Montrer que les polynômes  $P_k = (X - a)^k(X - b)^{2-k}$ ,  $0 \leq k \leq 2$ , forment une famille libre de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Exercice 14.11**

Pour quelles valeurs du réel  $m$  la famille  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  est-elle libre ?

$$u_1 = (1, 1, 0, 0) \quad u_2 = (1, m, 1, 0) \quad u_3 = (1, 0, m, 1) \quad u_4 = (1, 0, 0, m)$$

**Exercice 14.12**

Classique

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On pose  $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AM = MA\}$ .

1. Montrer que  $C(A)$  est un sous-e.v. de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2. Déterminer une base de  $C(A)$  avec  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 14.13**

Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  telles que  $u = (m, 1, m)$  appartient à  $\text{Vect}(v, w)$ , avec  $v = (1, 1, 1)$  et  $w = (1, m, -1)$ .

**Exercice 14.14** Extraire une base de :

$$F = \text{Vect}(a = (1, -1, 1), b = (2, 1, 1), c = (0, -3, 1), d = (1, 2, 1)).$$

Donner les coordonnées des quatre vecteurs dans cette base.

**Exercice 14.15**

Soit  $E$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que la somme des coefficients de la première colonne soit égale à la somme des coefficients de la seconde colonne. Montrer que  $E$  est e.v. et en donner une base.

**Exercice 14.16**

Méthode

→ Comparer deux espaces vectoriels  $F$  et  $G$  revient à déterminer si  $F \subset G$ ,  $G \subset F$ ,

$F = G$  ou rien de cela. Un moyen est de considérer  $F \cap G$  (ou la réunion).

Comparer  $F = \text{Vect}((1, 2, 1), (1, 3, 2))$  et  $G = \text{Vect}((1, 1, 0), (3, 8, 5))$ .

**Exercice 14.17** Dans chacun des cas suivants, donner une base de  $E_1, E_2, E_1 \cap E_2$  et  $E_1 + E_2$ .

$$1. E_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\text{et } E_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} 2x + 3z + t = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$2. E_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\text{et } E_2 = \text{Vect}((1, 1, 1, -1); (1, 0, 1, 0))$$

$$3. E_1 = \text{Vect}((2, 1, 1, 0); (1, -1, 0, 1)) \text{ et } E_2 = \text{Vect}((1, 1, 1, -1); (1, 0, 1, 0))$$

### SOMME DE SOUS-ESPACES

**Exercice 14.18** Soient  $E$  l'ensemble des suites convergentes,  $F$  l'ensemble des suites convergeant vers 0 et  $G$  l'ensemble des suites constantes.

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.

2. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

**Exercice 14.19** Soient  $E$  l'ensemble des fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $F = \{f \in E \mid f'(0) = f(0) = 0\}$  et  $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un espace vectoriel.

2. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

**Exercice 14.20** Soient  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques. Montrer que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

**Exercice 14.21** Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires de  $\mathbb{K}^3$ .

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}((1, 2, -3)).$$