Espaces probabilisés finis – Exercices

Dénombrements

Exercice 15.1 Méthode

➜ Une situation d'équiprobabilité s'étudie avec des dénombrements

Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   a) A : «Le tirage est tricolore»
   b) B : «Le tirage contient une boule noire et une rouge»
   c) C : «Les trois boules tirées sont de la même couleur»
2. On suppose maintenant que les tirages s'effectuent successivement, avec remise. Déterminer les probabilités des trois événements ci-dessus.

Exercice 15.2 *Répartition de votes*

Soit un entier $n \geq 5$. Les n personnes d'une assemblée élisent leur président. Il y a trois candidats a, b et c. Un candidat est élu s'il obtient au moins $n-2$ voix. Quelle est la probabilité pour qu'aucun candidat ne soit élu ?

Exercice 15.3 On tire successivement 12 cartes, sans remise, d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité des événements suivants ?
1. On tire les 4 as.
2. On tire les 4 as consécutivement.
3. On obtient 7 piques et 2 dames, les 7 piques étant obtenus dans l'ordre croissant.

Probabilités composées

Exercice 15.4

Soit n un entier naturel non nul. Une entreprise dispose d'un lot du n feuilles originales qu'elle a numérotées $1,\ 2,\ \cdots,\ n$. Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. L'entreprise programme le photocopieur afin que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant, suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les n originaux et les n copies dans une boite. Une personne est alors chargée du travail suivant : elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boite. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boite. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la boite et elle recommence.

On modélise l'expérience par un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$.

On considère l'événement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité c'est-à-dire que $a_n = \mathbf{P}\left(A_n\right)$.

1. Formaliser la situation de dénombrement associée à l'expérience : décrire Ω.
2. Calculer a_n.

Considérons $n=2$, la boite contient 4 feuilles. Soit V_k l'évènement : "k tirages sont nécessaires pour vider la boite".

3. Déterminer $\mathbf{P}(V_1)$.
4. Soit $k \geq 2$. Introduire des évènements ad-hoc afin de décrire l'évènement V_k.
5. Montrer que pour $k \geq 2$: $\quad \mathbf{P}\left(V_k\right) = \left(1-a_2\right)\left(a_2\right)^{k-2}$.

Exercice 15.5 *La roulette*

On charge un revolver dont le barillet comporte 6 emplacements avec une unique balle et on vise une cible.

1. Six joueurs tirent une fois à tour de rôle. On ne fait pas tourner la barillet entre chaque joueur, il y donc un et un seul gagnant. A-t-on plus de chance de gagner si on joue en premier ou en deuxième ou ... ou en dernier ?
2. Deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent. J_1 vise la cible et tire. Si le coup part, il gagne ; sinon on fait tourner la barillet et J_2 joue. Entre chaque joueur, on fait tourner le barillet. Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs gagne ou lorsque chacun a tiré n fois sans gagner ($n \in \mathbb{N}^*$).
   a) Combien y a-t-il de tirs au maximum ?
   b) On note C_k l'évènement "le coup part lors du k-ième tir".
   Justifier que $C_5 = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \overline{C_4} \cap C_5$
   c) Déterminer $\mathbf{P}(C_k)$.
   d) Exprimer J_1 en fonction des C_k.
   e) En déduire $\mathbf{P}(J_1)$ la probabilité que J_1 gagne.
   f) Avec une approche analogue, calculer $\mathbf{P}(J_2)$.
   g) Vaut-il mieux être J_1 ou J_2 ?
   h) Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne gagne ?

Probabilités totales - Bayes

Exercice 15.6
Une souris donne naissance à 1, 2 ou 3 souriceaux avec équiprobabilité. Chaque souriceau a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être une femelle.
1. Faire un arbre décrivant la situation.
2. Quelle est la probabilité que tous les souriceaux soient des femelles ?
3. Sachant que tous les souriceaux sont des femelles, quelle est la probabilité que la souris n'ait donné naissance qu'à un seul souriceau ?

Exercice 15.7 Méthode
On considère 3 urnes U_1, U_2 et U_3 contenant des boules rouges et noires. U_1 contient 2 boules rouges et 3 noires, U_2 1 rouge et 4 noires et U_3 3 rouges et 4 noires.
1. On choisit une urne au hasard et on y prélève une boule au hasard.
   a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
   b) La boule retirée est rouge. Quelle est la probabilité de l'avoir prélevée dans U_1 ?
2. On tire au hasard une boule dans U_1 et une dans U_2. On les met dans U_3 puis on tire au hasard une boule dans U_3.
   a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge de U_3 ?
   b) Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient toutes rouges ?
   c) La boule piochée dans U_3 est rouge. Quelle est la probabilité que la boule tirée dans U_1 soit noire ?

Exercice 15.8 On considère n personnes $I_1, I_2, \dots, I_n$. I_1 reçoit une information sous la forme de «oui» ou «non» et la transmet à I_2, puis I_2 la transmet à I_3, etc. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, le contraire avec probabilité $1-p$, et les réponses des n personnes sont indépendantes. On note T_k l'évènement : "l'information transmise par I_k est celle reçue par I_1 et $p_k = \mathbf{P}(T_k)$.
1. Proposer un arbre sur deux niveaux : $\{T_k, \overline{T_k}\}$ puis $\{T_{k+1}, \overline{T_{k+1}}\}$.
2. Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k.
3. Donner une expression explicite de la suite (p_k).
4. Interpréter le résultat obtenu lorsque k tend vers l'infini ?

Exercice 15.9 Un élève a le choix entre deux modes de transport, le bus 6 et le bus 18, pour se rendre au lycée. Le Bus 6 (resp. 18) a une probabilité $a \in]0,1[$ (resp $b \in]0,1[$) d'être en retard. De plus $a + b \neq 1$.
Le premier jour, il prend au hasard un des deux bus. Par la suite, il utilise le même que la veille si celui-ci était à l'heure, sinon il en change.
On note A_k l'événement «l'élève prend le bus 6 le k-ième jour» et $a_k = \mathbf{P}(A_k)$.
1. Proposer un arbre sur deux niveaux : $\{A_k, \overline{A_k}\}$ puis $\{A_{k+1}, \overline{A_{k+1}}\}$.
2. Donner une relation de récurrence vérifié par la suite (a_k).
3. Expliciter a_k en fonction de k, a et b.
4. Soit H_k l'évènement "le transport emprunté le k-ième jour est à l'heure" et $p_k = \mathbf{P}(H_k)$. Exprimer p_k en fonction des (a_j). Expliciter p_k.
5. Que dire de p_k lorsque k tend vers l'infini ?

Exercice 15.10 Méthode
Une grenouille se déplace sur les sommets A, B et C d'un triangle.
Si à l'instant n elle est en A (resp. C), à l'instant $n+1$ elle restera sur place avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sera en B avec probabilité $\frac{1}{2}$.
Si à l'instant n, elle est en B, à l'instant $n+1$ elle sera toujours en B avec probabilité $\frac{1}{2}$, elle sera en A avec probabilité $\frac{1}{4}$ et en C avec probabilité $\frac{1}{4}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n tels que la grenouille soit respectivement en A, B et C à l'instant n.
1. Justifier que pour n fixé, $\{A_n, B_n, C_n\}$ est une SCd'E.
2. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n $(n \in \mathbb{N})$.
3. Que vaut $a_n + b_n + c_n$ pour $n \in \mathbb{N}$?
En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer les limites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que remarque-t-on ?

Indépendance

Exercice 15.11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *Face* est $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$ et $p \neq \frac{1}{2}$. On note P_i l'évènement "*Pile sort lors du ième lancer*" et $F_i = \overline{P_i}$.
1. Décrire l'évènement "obtenir au moins une fois *Pile*" si $n = 4$ comme la réunion d'évènement deux à deux incompatibles.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois *Pile* ?
3. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, *Face* ne soit jamais suivi de *Pile* ? Commencer par traiter pour $n = 4$, puis pour n quelconque.
4. Soit A_k l'événement : «La séquence *Pile Face* sort pour la première fois aux lancers $k-1$ et k» $(2 \leq k \leq n)$. Calculer $\mathbf{P}(A_k)$.
5. Quelle est la probabilité de l'événement A : «La séquence *Pile Face* sort au moins une fois au cours des n lancers» .