

Espaces de dimension finie – Exercices

DIMENSION D'UN SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 16.1 Soit $F = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b+c & a-c \\ b & c-b & a+b+c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

1. Montrer que F est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. Donner une base de F ainsi que sa dimension.
3. Quelles sont les coordonnées de $M(1, 1, 1)$ dans cette base ?

Exercice 16.2 Déterminer une base et la dimension des e.v. suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\}$,
2. $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \text{ et } z = x - t\}$,
3. $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(0) = P(1) = 0\}$,
4. $E_4 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(0) = P(1)\}$.

Exercice 16.3 Déterminer le rang de $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ où : $P_1 = X + 2$, $P_2 = X^3 - X^2 + 2X + 2$, $P_3 = X^3 - 2X^2$, $P_4 = X^2 + X$, $P_5 = X^2 - 2$.

Exercice 16.4 Soit $E_1 = \text{Vect}(u_1 = (1, 2, 1), v_1 = (-1, 0, 1))$ et $E_2 = \text{Vect}(u_2 = (0, 1, 2), v_2 = (-1, 1, 1))$. Déterminer la dimension et une base de $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2$.

Exercice 16.5 On note E l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que E est un sous-e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et en déterminer la dimension

Exercice 16.6 Donner une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 16.7

Soit F et G deux sous-espaces vectoriel de E de dimension finie. Montrer que $\dim(F + G)^2 + \dim(F \cap G)^2 \geq \dim(F)^2 + \dim(G)^2$. Étudier le cas d'égalité.

Indication : Chercher à factoriser en utilisant $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

SOMMES DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 16.8 Soient $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(1) = P(-1) = 0\}$. Donner une base de F , sa dimension et un supplémentaire dans E .

On pourra introduire la notion de division euclidienne.

\Rightarrow Même question avec $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = P'(1)\}$.

Exercice 16.9 On définit les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 :

Méthode

$$a = (1, 2, 1, 3), \quad b = (3, 3, 2, 6), \quad c = (1, 2, 3, 4), \quad d = (-1, 1, 2, 1).$$

1. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (a, b, c, d)$ puis une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Compléter cette base de F en une base de \mathbb{R}^4 et en déduire un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 16.10

Méthode

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F_1 = \text{Vect}(1 + X, 1 + X^2 + X^3)$

$$F_2 = \text{Vect}(X - X^2, X^3) \text{ et } F_3 = \text{Vect}(1 + X - X^3)$$

Donner une base de $F_1 + F_2 + F_3$.

Exercice 16.11

Soit $F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{C}^5; x - iy + (3 + i)z - 2t + (1 - i)u = 0\}$.

Donner la dimension de F et en déterminer un supplémentaire dans \mathbb{C}^5 .

Exercice 16.12 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, G, H des sous-e.v. de dimensions finies.

1. Prouver l'inégalité :

$$\dim(F + G + H) \leq \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)$$

2. Donner un exemple où l'inégalité précédente est stricte.

Exercice 16.13 * *

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et F un sous-ev de E non trivial ($F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$). Montrer que F admet une infinité de supplémentaires dans E .

Exercice 16.14

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux c'est-à-dire sans aucune racine commune. On note $p = \deg(P)$, $q = \deg(Q)$, $n = p + q - 1$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$.

1. Donner la dimension de E .

2. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de E multiples de P est un sous-espace vectoriel de E .

Donner la dimension de F_P en fonction de n et p .

3. Montrer que $F_P \cap F_Q = \{0_E\}$.

4. En déduire que $E = F_P \oplus F_Q$ et qu'il existe $U, V \in E$ tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 16.15

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E . Prouver

$$\left. \begin{array}{l} H \subset F + G \\ \dim(H) = \dim(F) + \dim(G) \end{array} \right\} \Rightarrow H = F \oplus G$$

Exercice 16.16 * * *

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que, pour tous sous-espaces F et G de E , on a :

$$\dim(F) = \dim(G) \Leftrightarrow F \text{ et } G \text{ ont un supplémentaire commun}$$

Indication : On pourra d'inspirer de la démonstration de la relation de Grassmann ou effectuer une récurrence descendante.