Intégration – Exercices

Primitives

Exercice 17.1
Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^x ne^{nt}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1}\mathrm{d}t=(e^x-1)^n$

Exercice 17.2 Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_0^6\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\exp(x)dx\qquad B=\int_0^1\frac{2x+5}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$

$$C=\int_0^\pi\left|2\cos(x)-1\right|dx\qquad D=\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+7}}dx$$

$$E=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\mathrm{d}x\qquad F=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\exp\big(\cos(x)\big)\mathrm{d}x$$

Exercice 17.3
Calculer les primitives suivantes en précisant l'intervalle de définition :

$$\int^x\frac{t^4+1}{t^3-t}\mathrm{d}t\qquad\int^x\frac{t+2}{(t-2)^2(t-1)}\mathrm{d}t$$

Intégrales et propriétés

Exercice 17.4 Montrer l'existence et calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{3x}\frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 17.5 *Inégalités de Cauchy-Schwarz* **Prog**
Soient $f,g\in\mathcal{C}([a,b])$
1. Montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geq0$$

2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}$$

3. Donner une CNS du cas d'égalité.

Exercice 17.6 *Inégalités de Hölder*
Soient $f,g\in\mathcal{C}([a,b])$ et $\alpha>1$ et $\beta>1$ deux réels tels que $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.
On souhaite établir l'inégalité de Hölder :

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq\left(\int_a^b|f(x)|^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_a^b|g(x)|^\beta\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

1. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder.
2. Étudier la fonction $\varphi:u\mapsto uv-\frac{u^\alpha}{\alpha}$ afin de montrer que pour tout réels positifs u et v, on a

$$uv\leq\frac{u^\alpha}{\alpha}+\frac{v^\beta}{\beta}$$

3. Établir l'inégalité de Hölder. On pourra poser

$$u=\frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b|f(t)|^\alpha\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\ \text{ et }\ v=\frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b|g(t)|^\beta\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

Exercice 17.7 **Classique**
1. Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=0}^n(-1)^kt^{2k}+(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\left|\int_0^x(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|\leq\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 17.8 *Échange de décimales*
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(0, a_1a_2a_3\dots) = 0, a_2a_1a_3\dots$.
Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 17.9 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t \to 0$.

Exercice 17.10 Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x |a(t)|\mathrm{d}t$ converge lorsque x tend vers $+\infty$, et $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel réel des solutions sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle $y' = ay$. Soit $y \in \mathcal{S}$, montrer :

(i) y est bornée sur $\mathbb{R}_+$

(ii) y admet une limite finie en $+\infty$.

Sommes de Riemann

Exercice 17.11 Identifier des sommes de Riemann et déterminer un équivalent des suites suivantes :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \exp\left(-\frac{k}{n}\right)$$

$$c_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+2} \qquad d_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

$$e_n = \sum_{k=0}^{n-1} k \sin\left(\frac{k}{n}\right) \qquad f_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 17.12 Identifier des sommes de Riemann et déterminer un équivalent des suites suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^2+k} \qquad \sum_{k=1}^{2n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$

Exercice 17.13
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue.
1. Montrer qu'il existe une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que

$$\forall k \in [0, n-1], \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

2. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

Indication : Introduire la fonction réciproque d'une primitive de f.

Intégration par parties

Exercice 17.14 Soit $u \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$. Déterminer la limite lorsque $\lambda \to +\infty$ de :

$$\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t$$

Exercice 17.15 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : **Méthode**

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

1. a) Calculer J_1 et montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

b) En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

c) Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 17.16 *Inégalité de Poincaré*
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $f(0)=0$.
1. Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x)|^2 \leq x \int_0^x |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$$

2. En déduire à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Indication : Introduire G la primitive de f'^2 qui s'annule en 0.

Exercice 17.17 Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$.

Changement de variable

Exercice 17.18 Calculer les intégrales ou primitives suivantes à l'aide d'un changement de variable :

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t^2)}$ poser $u=\ln(t)$ $\quad$ $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^4}$ poser $v=\tan(t)$

$\displaystyle\int_1^4 \cos\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$ poser $t=u^2$ $\quad$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$ poser $x=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(\varphi)+\frac{1}{2}$

Exercice 17.19 Méthode

Calculer les intégrales suivantes en posant $u=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos(t)} \qquad \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\tan^2(t)}$$

Exercice 17.20 Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\big(\cos(x)\big)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de l'intégrale : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\big(1+\tan(x)\big)\mathrm{d}x$

Exercice 17.21 *Règle de Bioche* Méthode

Pour intégrer une fraction rationnelle en sinus et cosinus, on considère $g(t)=f(t)\mathrm{d}t$, alors
- si $g(-t)=g(t)$ alors poser $u=\cos(t)$
- si $g(\pi-t)=g(t)$ alors poser $u=\sin(t)$
- si $g(\pi+t)=g(t)$ alors poser $u=\tan(t)$

Calculer les primitives suivantes suivantes :

$$\int^x \frac{\sin^3(t)}{\cos^2(t)(1-\cos(t))^3}\mathrm{d}t \qquad \int^x \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}\mathrm{d}t \qquad \int^x \frac{\sin^2(t)+1}{\cos^4(t)}\mathrm{d}t$$

Exercice 17.22
Soit l'intégrale définie par : $\quad x\in[0,\frac{\pi}{4}[\qquad I(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\tan(t)}{\sqrt{\cos(2t)}}\mathrm{d}t$

Calculer $I(x)$ et donner sa limite en $\frac{\pi}{4}$. On fera successivement les changements de variable $u=\tan(t)$ et $v^2=1-u^4$.

Intégrale à paramètre

Exercice 17.23 Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} e^t\ln(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x(e-1)\ln(x)$

Exercice 17.24 Soit $f\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 17.25 Après avoir justifié leur existence, calculer :

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}} \frac{1}{x-\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^x \cos(t^2)\mathrm{d}t \qquad \lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-x}\int_x^{x^2}\frac{1+e^{t^2}}{1+e^t}\mathrm{d}t$$

Exercice 17.26 On pose $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{te^t}$.
1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f'(x)$.
3. Montrer que $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
4. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Formules de Taylor

Exercice 17.27 Montrer à l'aide des formules de Taylor-Lagrange les inégalités suivantes :

1. pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\left|e^{-b} - e^{-a} + (b-a)e^{-a}\right| \leq \dfrac{|a-b|^2}{2}$,

2. pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

Exercice 17.28 Méthode

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin(t)}\mathrm{d}t$.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, u \in [-1,1],\ |e^u - 1 - u| \leq Cu^2$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)e^{x\sin(t)}\mathrm{d}t\right) = 0.$$

Que peut-on en déduire pour f ?

3. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 17.29 Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et $c \in \,]a,b[$:

$$\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} f''(c)$$

Exercice 17.30 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \,]a,b[$ et k réel strictement positif tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x_0) = 0$ et $\sup\{|f^{(n)}(x)|\ ;\ x \in [a,b]\} \leq k^n n!$

1. Montrer que f est nulle sur $]x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}[$.

2. Montrer que f est nulle sur $[a,b]$.

Exercice 17.31 *Complexité de la méthode de Newton*

Rappel

Objectif : Résoudre $f(x) = 0$ sur I, un segment où $f \in \mathcal{C}^2(I)$, f' ne s'annule pas sur I et ℓ est unique racine de f.

Méthode : Introduire une suite récurrente (u_n) de limite ℓ telle que $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g : t \mapsto t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$

1. Utilisé la formule de l'inégalité de Taylor-Lagrange pour montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{M}{2}|u_n - \ell|^2 \qquad (1)$$

En particulier, $M = \dfrac{M_2}{m_1}$ convient avec $M_2 = \sup\limits_I(|f''|)$ et $m_1 = \inf\limits_I(|f'|)$.

Remarque : On note que $g'(\ell) = 0$: ℓ est dit point fixe *super attractif.*

2. Considérons $|u_0 - \ell| \leq \dfrac{1}{5M}$. Montrer que pour tout n

$$|u_n - \ell| \leq \frac{2}{M}10^{-2^n} \qquad (2)$$

3. En déduire, une estimation de la complexité de la méthode de Newton exprimée en fonction de $\dfrac{1}{p}$ où p est la précision souhaitée.

Préciser l'impact *théorique* sur la précision de la limite que donne chaque itération de la méthode.

Rappeler la complexité des méthodes de dichotomie et de balayage et les comparer.

Exercice 17.32

1. Donner le développement de Taylor avec reste intégral de l'exponentielle entre 0 et 1 à l'ordre $n+1$.

2. En déduire la convergence de la suite de terme général $u_n = n\sin(2\pi n!e)$ et préciser la limite.