

Applications linéaires – Exercices

APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 18.1 Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-y + z; x - z; -x + z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$, ainsi qu'une base de chacun d'eux.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 18.2 Trouver une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont l'image est engendrée par $(1, 2, 0, -4)$ et $(2, 0, -1, -3)$.

Exercice 18.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ et u et v les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définies par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = -nP + 2XP'$ et $v(P) = nXP - X^2P'$.

1. Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $u \circ v - v \circ u = 2v$.
3. En déduire que $u \circ v^n - v^n \circ u = 2nv^n$.

Exercice 18.4 Soient $h = f + g$ avec $f : (x, y, z) \mapsto (2x, 2y, 2z)$ et $g : (x, y, z) \mapsto (0, 3x, 2x - y)$.

1. Calculer g^2 (Rappel $g^2 = g \circ g$), g^3 , puis g^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire l'expression de h^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18.5

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f$.

1. Donner des exemples de telles applications.
2. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Méthode

RANG

Exercice 18.6 Déterminer le rang des applications linéaires, préciser une base de leur noyau et de leur image :

1. $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$.
2. $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + y + 2z, x - 2y + z, 2x - y + 3z)$.
3. $\varphi_3 : \mathbb{C}_2[X] \rightarrow \mathbb{C}^3, P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$.
4. $\varphi_4 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}_3[X], (a, b, c) \mapsto a(X^3 + X) + b(X^2 + 1) + cX$.

Exercice 18.7 Inégalité de Sylvester

1. Soit E, F, G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que : $\text{rg}(gf) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(E) \leq \text{rg}(gf) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$$

Exercice 18.8

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$
2. En déduire $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$

Exercice 18.9 Soient E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$.

1. Montrer que, pour tout $q \geq p$, on a : $\text{Ker}(f^q) = \text{Ker}(f^p)$.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p)$.

Exercice 18.10 Soient E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$
- (ii) $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$
- (iii) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$
- (iv) $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$
- (v) $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$

Exercice 18.11 *Endomorphisme nilpotent*

Classique

1. On considère $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul. On se propose de montrer que $\text{Im}(g^2) = \text{Ker}(g)$.

- Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
 - Montrer que $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
 - Déterminer $\text{Im}(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\text{Ker}(g)$. Pour finir, déterminer $\text{Im}(g^2)$ puis conclure.
2. Généralisation : soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ et f^{n-1} non nulle.
- Montre que : $\exists v \in \mathbb{R}^n ; (v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
 - Donner une base de $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f^j)$, $\text{Ker}(f^k)$ pour $j, k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
 - Conclure.

Exercice 18.12 *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2*

Objectif : Démontrer le théorème introduit en début d'année.

Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Montrer que l'application $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi((u_n)) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F .
- Trouver les suites géométriques de F .
- En déduire une base de F et conclure sur la forme des suites de F .

Exercice 18.13

Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Montrer que si $f \in \mathcal{GL}(E)$ alors on a bien $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- On suppose maintenant que f admet pour polynôme annulateur :

$$P = \sum_{k=1}^p a_k X^k = a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_p X^p \text{ avec } a_1 \neq 0 \text{ et } p \geq 1$$

- Soit y un élément de $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.
 - Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $y = f(x)$ et $f^2(x) = 0$.
 - En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $f^k(x) = 0$ puis déterminer y .
- Établir que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

PROJECTEURS ET SYMÉTRIE

Exercice 18.14 Dans $\mathbb{R}_3[X]$, donner l'expression de la symétrie par rapport à $\text{Vect}(1, 1 + X^2)$ parallèlement à $\text{Vect}(X + X^2, 1 - X^3)$.

Exercice 18.15 Soit E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $p \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que p est un projecteur si et seulement si :

$$\dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Ker}(\text{Id}_E - p)) = \dim(E)$$

Exercice 18.16 Soient E un $\mathbb{R}$ -e.v. et p et q deux endomorphismes de E . Montrer l'équivalence suivante :

(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q \Leftrightarrow$ (ii) p et q sont deux projecteurs de même noyau

HYPERPLANS

Exercice 18.17 ✨ ✨ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, $u \in E$ non nul et H un hyperplan de E tel que :

$$H \oplus \text{Vect}(u) = E$$

- Soit s la symétrie par rapport à $\text{Vect}(u)$ parallèlement à H . Montrer que, si un endomorphisme f de E commute avec s , alors H et $\text{Vect}(u)$ sont stables par f .
- Prouver que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tous les autres sont les homothéties.

Exercice 18.18 Soient E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension 2, u un vecteur non nul de E et φ une forme linéaire non nulle sur E .

- Que dire de $\text{Ker } \varphi$?
- Soit $f : E \rightarrow E$, $x \mapsto x + \varphi(x)u$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que l'ensemble des points fixes de f est une droite vectorielle.
- Montrer que :
 - f est un isomorphisme si et seulement si $\varphi(u) \neq -1$
 - f est involutive ($f \circ f = \text{Id}_E$) si et seulement si $\varphi(u) = -2$.