# Matrices et applications linéaires – Exercices

## Calculs matriciels

**Exercice 20.1**
Calculer $A^2$ lorsque $A = (a_{k\ell})_{1\leq k,\ell\leq n}$ et $a_{k\ell} = \exp\left(\dfrac{2ik\ell\pi}{n}\right)$.

**Exercice 20.2** Dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse éventuelle :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 20.3**
On considère les suites réelles $u$ et $v$ définies par $u_0$, $v_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. Montrez qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2. Montrer que l'on peut écrire $A = 5I_2 + J$ avec $J$ une matrice à déterminer.
3. Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Déduisez les expressions de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

## Trace et rang

**Exercice 20.4** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}\,(AM) = \mathrm{tr}\,(BM) \quad \Rightarrow \quad A = B$$

**Exercice 20.5** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right) = 0$. Que dire de $A$ ?

**Exercice 20.6**
Résolution de l'équation en $X$, où $X, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \neq 0$ :

$$X + \mathrm{tr}\,(X).A = B$$

On pose $h : X \mapsto \mathrm{tr}\,(X)A$ et $f = id + h$
1. Trouver une polynôme annulateur de $f$.
2. A quelle condition $f$ est bijective ?
3. Lorsque $f$ n'est pas bijective, montrer que $f$ est un projecteur dont vous déterminerez son noyau et son image.
4. Résoudre l'équation.

**Exercice 20.7** Calculer le rang des matrices suivantes, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 20.8** Montrer que toute matrice rang 1 peut se décomposer sous la forme d'un produit d'une colonne par une ligne :

$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{rg}(M) = 1 \implies \exists C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$; $M = CL$

**Exercice 20.9**
1. Soient $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Montrer que : **Prog**

$$\mathrm{rg}(MN) \leq \min(\mathrm{rg}(M), \mathrm{rg}(N)).$$

2. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $(AB)^2$ et déterminer son rang.
b) En déduire à l'aide de 1. que $BA$ est de rang 2 et qu'elle est inversible.
c) Calculer $BA$.

## Matrices et applications linéaires

**Exercice 20.10** Soit $M$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Quelle est l'image de $\overrightarrow{u} = (2, -1, 3)$ par l'application linéaire associée à $M$ ?

---

**Exercice 20.11**

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système $(\mathcal{S})$ admet-il au moins une solution ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base $\big(1, X-1, (X-1)^2\big)$ est $A$. À l'aide de la question précédente, déterminer une base de $\operatorname{Im} u$

---

**Exercice 20.12**
1. Quelle est la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire $f$ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x+1)$.
2. Établir que $f$ est un automorphisme et donner la matrice de $f^{-1}$ et plus généralement de $f^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

---

**Exercice 20.13** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\varphi : M \mapsto AM$.

Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Exprimer $\varphi^{-1}$ et donner le matrice de $\varphi^{-1}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

---

**Exercice 20.14**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = 2XP - (X^2-1)P'$
1. Donner la matrice de $f$ dans la base $(1, X, X^2)$ :
2. En considérant la matrice montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(X, 1+X^2)$ et déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.

---

**Exercice 20.15** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace de dimension 3 de base canonique $\mathcal{B}$. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice relative à la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$. Ces espaces sont-ils supplémentaires ?
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f^2)$ et une base de $\operatorname{Im}(f^2)$. Ces espaces sont-ils supplémentaires ?

---

**Exercice 20.16**
Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $A$ le sous-ensemble défini par

$$A = \{f \in \mathcal{L}(E) \ ; \ F \subset \operatorname{Ker}(f)\}$$

Montrer que $A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Si $E$ est de dimension finie, déterminer la dimension de $A$.

---

**Exercice 20.17** *Matrice compagnon*
Soit $P = X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.
On définit la matrice **compagnon** $C$ associé à $P$ par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{K}^5$. On note Id l'application identité de $\mathbb{K}^5$ et $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $C$.
1. a) Exprimer, pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de $e_{i+1}$.
b) En déduire, pour tout $j \in [\![1;4]\!]$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^5(e_1) = -\big(a_0e_1 + a_1e_2 + a_2e_3 + a_3e_4 + a_4e_5\big)$.
2. Soit $g$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^5$ définit par $g = P(f)$.
a) Vérifier que $g(e_1) = 0$.
b) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.

c) En déduire que pour tout $i \in [\![1;5]\!]$, $g(e_i) = 0$.

d) Montrer que $P$ est un polynôme annulateur de $f$.

3. Déterminer une matrice $A$ telle que $A^5 = A^3 + 2A + I_5$.

---

**Exercice 20.18**

1. Soit $f$ la rotation du plan d'angle $\theta$ et de centre l'origine du repère.

a) Donner la matrice de $f$, noté $A$, dans la base canonique.

b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donner l'expression de $A^k$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner une matrice $B$ telle que $B^k = A$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donner l'expression de $A^k$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ impair, donner une matrice $B$ telle que $B^k = A$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ pair, donner une matrice $B$ telle que $B^k = A$.

---

## Matrices équivalentes

**Exercice 20.19**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $P, P', Q, Q'$ des matrices carrées telles que

$$B = QAP \text{ et } A = P'BQ'$$

Montrer que $A$ et $B$ sont équivalentes.

---

**Exercice 20.20** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rang de

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

**Indication :** Établir qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ tel que $\mathrm{rg}(f_A) = \mathrm{rg}(f_{J_r})$.

---

## Matrices semblables

**Exercice 20.21** L'objectif est de montrer que $A$ et $B$ sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 17 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice $A$ dans la base canonique :

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$.

2. Trouver une base dans laquelle la matrice de $u$ est $B$.

---

**Exercice 20.22** *Matrice nilpotente*

1. On considère un endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^n$ tel que : $g^{n-1} \neq 0$ et $g^n = 0$.
On a déjà vu (TD 17) qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathcal{B} = \left(g^{n-1}(a), g^{n-2}(a), \dots, a\right)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$. Donner la matrice $N$ de $g$ dans la base $\mathcal{B}$ .

2. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ -7 & 4 & 5 & -7 \\ -11 & 6 & 8 & -11 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A^2$, $A^3$, $A^4$.

b) En s'inspirant de la première question, montrer que $A$ et $B$ sont semblables et donner une matrice $P$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Est-ce que $P$ est unique ?

---

**Exercice 20.23** Soit $p$ la projection sur $E$ parallèlement à $F$ avec :

$$E = Vect\left(a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad F = Vect\left(c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

1. Vérifier $E$ et $F$ sont supplémentaires, c'est-à-dire que que la famille $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Donner les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans cette base.
2. Déterminer la matrice, $A$, de $p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire, la matrice de la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $E$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice, $B$, de $p$ dans la base $\{a, b, c\}$.
5. En introduisant une matrice ad-hoc, donner une relation liant $A$ et $B$.

---

**Exercice 20.24** *Diagonalisation d'une matrice*
Soit $f$ l'endomorphisme de matrice $A$ dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de $E$
2. Déterminer les valeurs de $\lambda$ telles que $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.
3. Pour chaque valeur trouvée, donner une base de $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
4. Vérifier que la juxtaposition de base trouvée est une base de $E$.
5. Donner la matrice de $f$ dans cette nouvelle base.
6. Considérer chacune des questions suivantes dans la nouvelle base pour apporter une solution :
a) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner $A^n$.
b) On admet que $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base de $\mathcal{C}(A)$.
c) Résoudre $X^3 = A$. On pourra commencer par montrer que $X \in \mathcal{C}(A)$.
**Remarque :** On dit qu'une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Une CNS est mise en évidence à la question 4 : la juxtaposition des bases des $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ forme une base de $E$.

---

**Exercice 20.25** Soit $n \geq 2$. On considère l'application $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - nXP.$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = (X+1)^k (X-1)^{n-k}$.
Montrer que la famille $\mathcal{C} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathcal{C}$.

---

## Matrices par blocs

Considérant $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'écrivant par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}$$

On admet que si les produits $AA'$ et $DD'$ sont compatibles alors le produit $MM'$ l'est aussi et $MM' = \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{pmatrix}$

**Exercice 20.26** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} J_{\operatorname{rg}(A)} & 0 \\ 0 & J_{\operatorname{rg}(B)} \end{pmatrix}$.
2. En déduire le rang de $C$.

---

**Exercice 20.27** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le rang de $C = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.
2. Donner un CNS d'inversibilité de $C$.
3. Donner l'expression de l'inverse de $C$ lorsqu'elle existe.

---

**Exercice 20.28** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de rang $k$. Calculer le range de $B \in \mathcal{M}_{np,mp}(\mathbb{K})$ avec

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$

---