Espaces préhilbertiens réels
Exercices

Produit scalaire et norme

Exercice 23.1 Pour chaque matrice A_i, déterminer si $\varphi_i : (X,Y) \mapsto X^{\mathrm{T}}AY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ selon la taille de A_i :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Indication : Pour montrer les aspects positive et définie, vous pouvez travailler à réécrire φ_i comme la somme de carrés. Par exemple : $x^2 + 6xy + 4y^2 = (x+3y)^2 + y^2$

Exercice 23.2 *Matrice de Gram-Schmidt*
1. Montrer que l'on peut associer à tout produit scalaire, φ, sur E muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x, y \in E$ avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$

$$\varphi : (x,y) \mapsto X^{\mathrm{T}}AY$$

2. Identifier la matrice associée aux produits scalaires suivants :
   a) $\varphi_1 : (x,y) \mapsto x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$
   b) $\varphi_2 : (x,y) \mapsto 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$

Exercice 23.3 Montrer que pour tout $x, y \in E$
(i) $2\langle x,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2$
(ii) $4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$
(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$ (égalité du parallélogramme)
Remarque : L'égalité du parallélogramme dit que la somme des carrés des longueurs des diagonales est égales à la sommes des carrés des longueurs des côtés : $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Exercice 23.4 Soit $E = \mathbb{R}^2$, considérons l'application $N \in (\mathbb{R}_+)^E$ telle que $N(X) = \max(|x_1|, |x_2|)$.
1. Montrer que N est une norme sur E, c'est à dire qu'elle vérifie la propriété de séparation, d'homogénéité et l'inégalité triangulaire.
2. Montrer que $\varphi : (X,Y) \mapsto N(X+Y)^2 - N(X)^2 - N(Y)^2$ n'est pas bilinéaire sur E.
3. En déduire que N n'est pas une norme euclidienne, c'est-à-dire qu'elle n'est pas associée à un produit scalaire.

Exercice 23.5
Dans E un espace préhilbertien, montrer que pour tout $x, y \in E$

$$\langle x,y\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 23.6
Prouver l'inégalité suivante puis déterminer une CNS d'égalité :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, (x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

Exercice 23.7
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n)) \in (\mathbb{R}_+^n)^3$; montrer :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_kc_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2c_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2c_k\right)$$

Exercice 23.8 Classique

1. Montrer que $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}}B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}\,(A) \leq \sqrt{n\mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}}A)}$.
Étudier le cas d'égalité.
3. On rappelle que $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\forall A, B \in \mathcal{S}_n, \qquad \mathrm{tr}\,(AB+BA)^2 \leq 4\mathrm{tr}\,(A^2)\mathrm{tr}\,(B^2)$$

Exercice 23.9
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.
Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P, A\rangle = P(0)$?

Exercice 23.10
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.

Exercice 23.11 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
1. Calculer ${E_i}^{\mathrm{T}} A E_j$ où E_k est la matrice du vecteur e_k de la base canonique.
2. Montrer que A est une isométrie : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \|AX\| = \|X\|$.
3. Montrer que $|\sum_{i,j} a_{ij}| \leq n$ et étudier le cas d'égalité.

Orthogonalité

Exercice 23.12 Montrer que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse :

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23.13 *Fourrier*
Soit E un espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg$$

Montrer que les fonctions de la forme $x \mapsto \cos(mx)$, $m \in \mathbb{N}$ ou $x \mapsto \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont toutes deux à deux orthogonales.
Remarque : La décomposition de Fourrier d'une fonction est sa projection sur l'espace engendré par ces fonctions.

Exercice 23.14 Soit $\varphi : (P,Q) \mapsto \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base φ-orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 23.15 ❄❄ Soit E un espace euclidien de dimension n.
Montrer que pour tout $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in E^n$

$$\det(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \|x_1\|\ \|x_2\|\ \cdots\ \|x_n\|$$

Que dire du cas d'égalité ?

Exercice 23.16 E est un espace euclidien, f et g deux endomorphisme de E qui commutent, et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement symétrique et antisymétrique. Montrer que :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad \langle f(\overrightarrow{u}), g(\overrightarrow{u})\rangle = 0$$

puis que :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad \|(f-g)(\overrightarrow{u})\| = \|(f+g)(\overrightarrow{u})\|$$

Exercice 23.17 ❄❄ Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 fg \quad \text{et} \quad F = \{f \in E; f(0) = 0\}$$

1. Soit $g \in E$. Montrer que l'on peut construire une suite $(g_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]0,1], \quad g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$$

et telle que $\|g_n - g\| \to 0$.
2. En déduire que $F^\perp = \{0_E\}$.
3. Que dire de F et $F^\perp$

Exercice 23.18 Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et φ définie par

$$\forall P, Q \in E, \quad \varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P"(0)Q"(0)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $F = \mathrm{Vect}(b_1 = 1 + X + X^2, b_2 = 1 - X + X^2)$, déterminer une base de $F^\perp$, l'orthogonal de F relativement à φ.

Exercice 23.19 Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs normés telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 23.20 Calculer $Card(\mathcal{O}_n \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))$.

Projection orthogonale et distance

Exercice 23.21 *Inégalité de Bessel*
Soit F un sous-espace vectoriel de E un espace euclidien et p la projection orthogonale sur F. Montrer que

$$\forall x \in E, \qquad \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Montrer à l'aide d'un contre exemple que le résultat devient faux si p est une projection non orthogonale. Vous pourrez interprété la situation à l'aide d'un parallélogramme.

Exercice 23.22
Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.
1. Comparer f et f^2.
2. Reconnaître f et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
4. Que peut-on dire de l'application $g = Id - 2f$?

Exercice 23.23
On désigne par $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle dirigée par $e_1 + 2e_2 - e_3$.
Quelle est l'image par cette symétrie du plan d'équation $3x - y + z = 0$?

Exercice 23.24 *Caractérisation des matrices de projection orthogonale*
1. Montrer qu'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée si et seulement si c'est une matrice de projection symétrique, c'est-à-dire

$$P^2 = P \quad \text{et} \quad P^{\mathrm{T}} = P$$

2. Proposer une caractérisation des matrices de symétrie orthogonale dans une base orthonormale et la prouver.
3. Que dire des matrice orthogonale symétrique ?
4. En préambule ou à la fin, veiller à clarifier le vocabulaire introduit dans ce chapitre en caractérisation des notions suivantes :
- matrice d'un projection
- matrice orthogonale
- matrice d'une symétrie
- matrice symétrique
- l'aspect orthogonale d'une matrice de projection orthogonale
- l'aspect orthogonale d'une matrice de symétrique orthogonale

Indication : On rappelle que produit scalaire dans une base orthonormale s'écrit : $\langle X, Y, = \rangle\ X^{\mathrm{T}}Y$ et qu'une projection est orthogonale si son image et son noyau sont orthogonaux.

Exercice 23.25 Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1, \; A = (x_i x_j)_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{et} \quad S = 2A - I_n$$

Montrer que $S \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{O}_n$.

Exercice 23.26 Classique

Calculer $\alpha = \inf\limits_{a,b,c} \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3 + at^2 + bt + c)^2 \mathrm{d}t}$.

Indication : On pourra interpréter ce nombre comme la distance d'un point à un sous-espace.

Exercice 23.27
Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x+y+z+2t=0 \text{ et } x+y+2z+3t=0\}$.
Chercher la matrice de la projection orthogonale sur F

Exercice 23.28 Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, défini par

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$$

1. Former la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur F.
2. Étant donné $X \in \mathbb{R}^4$, exprimer la distance de X à F.

Espaces affines

Exercice 23.29 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique, calculer le distance du point $A:(2;-1;3)$ à la droite $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x-y+2z+3 &= 0 \\ x+3y+z+9 &= 0 \end{cases}$$

Exercice 23.30 Dans le plan euclidien on donne quatre droites :

$$\mathcal{D}_1 : x+3y-2=0 \qquad \mathcal{D}_2 : 4x+y+1=0$$
$$\mathcal{D}_3 : 2x+5y-5=0 \qquad \mathcal{D}_4 : 2x-y+5=0$$

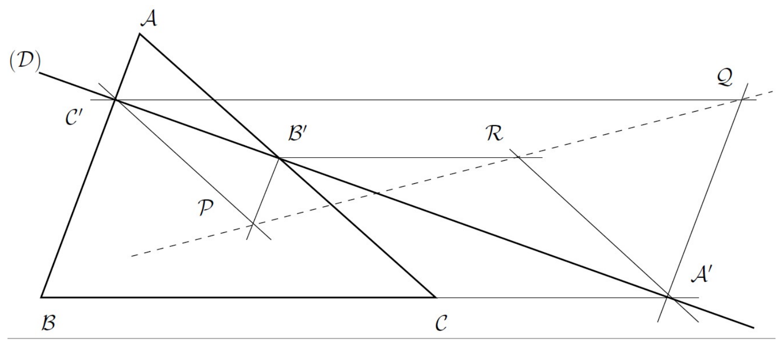
Écrire une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points d'intersection entre $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_4$.

Exercice 23.31 Dans un repère orthonormal du plan, calculer la distance de $M=(x,y)$ avec les droites définies par :

$$\mathcal{D}_1 = (A=(1,2), \overrightarrow{u}=(1,1)), \quad \mathcal{D}_2 : y=-x+2, \quad \mathcal{D}_3 = (A=(1,1), B=(2,-1))$$

Exercice 23.32 Soit ABC un triangle et $\mathcal{D}$ une droite quelconque coupant le triangle en
$A' = \mathcal{D}\cap(BC)$, $B' = \mathcal{D}\cap(AC)$ et $C' = \mathcal{D}\cap(AB)$. De plus, on définit P,Q,R par :

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}, \qquad \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BC'}, \qquad \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CB'}$$



1. Soit O un point fixe du plan ; démontrer le critère d'alignement suivant :

$$E, F \text{ et } G \text{ sont alignés} \quad \Leftrightarrow \quad det(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) + det(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}) + det(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OE}) = 0$$

2. Montrer que P, Q et R sont alignés.

Exercice 23.33 Montrer que la distance entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ non parallèles passant respectivement par A_1 et A_2 et dirigée respectivement par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ vaut

$$\frac{|\det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2})|}{\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|}$$