Fonctions de deux variables
Exercices

Topologie et continuité

Exercice 24.1
Représenter les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une partie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est **convexe** si pour tout $A, B \in Omega$, alors $[A, B] \subset \Omega$.
1. $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } y \geq |x|\right\}$.
Montrer que A est fermée, convexe et bornée.
2. B l'ensemble de définition de $f(x, y) = \ln(1 - xy)$.
Montrer que B est un ouvert. Est-il borné ?
3. $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 < |x - 1| < 2\right\}$.
Montrer que C est un ouvert. Est-il convexe ?
4. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0\, y \geq 0, \text{ et } 2x + 3y < 4\right\}$.
Montrer que D est convexe. D est-il ouvert ? fermé ?

Exercice 24.2
Soit $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\langle X, Y\rangle = \cos\widehat{(X, Y)}\|X\|\|Y\|$

Exercice 24.3 Étudier la continuité en $(0, 0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $(0, 0)$:

$$1)\ f(x,y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^6} \qquad 4)\ f(x,y) = \frac{x + y^2}{x^2 + y^2}$$
$$2)\ f(x,y) = \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad 5)\ f(x,y) = \frac{xy}{x^4 + y^4}$$
$$3)\ f(x,y) = \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} \qquad 6)\ f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

Exercice 24.4 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition et montrer qu'elle est continue sur cet ensemble :

$$f(x, y) = (1+x^2)^{\cos(y)} \qquad g(x, y) = \frac{\ln(2 - x^2 - y^2)}{x^2 y^4 + 1} \qquad h(x, y) = \frac{\cos(x^2 y)}{xy - 1}$$

Dérivées partielles

Exercice 24.5 Étudier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes et calculer-les :
1. $f(x, y) = x^y$
2. $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^3 y)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$,
3. $f(x, y) = x^2 \sin \dfrac{y}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$.

Exercice 24.6 Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + x^3 y + y^2$.
1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les dérivées partielles par rapport à x et à y de f.
3. Déterminer le gradient de f en $A = (1, 1)$.
4. Justifier l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de f en A et le déterminer.
5. Déterminer une équation du plan tangent en A au graphe de f.

Exercice 24.7 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = f\big(\sin(1 - t^2), \ln(1 + e^t)\big).$$

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 24.8 Déterminer la dérivée de f en A dans la direction U (on vérifiera que U est unitaire) :
1. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $A = (0, 1)$, $U = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
2. $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$, $A = (1, 2)$, $U = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right), \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 24.9 Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $(A, B) \in \Omega^2$.
En considérant la fonction $t \mapsto f(A+t(B-A))$ sur $[0, 1]$, montrer qu'il existe $C \in [A, B]$ tel que :

$$f(B) - f(A) = \langle B - A, \nabla f(C)\rangle$$

Exercice 24.10 Montrer que l'application f admet en $(0\ ;0)$ une dérivée dans n'importe quelle direction mais n'y est pas continue

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ si } (x\ ;y) \neq (0\ ;0) \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{array}$$

Exercice 24.11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Monter que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Monter que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24.12 Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0\ ;0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln(x^2+y^2)$.
1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité à l'origine ?
2. Considérant $f(x,y) = -f(y,x)$, établir une relation entre les dérivées partielles de f.
3. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Relations entre les dérivées partielles

Exercice 24.13 Soit $f : (x,y) \mapsto (x^2-y^2)\ln(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité à l'origine ?
2. Considérant $f(x,y) = -f(y,x)$, établir une relation entre les dérivées partielles de f.
3. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 24.14 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Établir une relation entre ses dérivées partielles si $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall (x\ ;y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a) f(x+t, y+t) = f(x,y) \qquad b) f(tx, ty) = f(x,y)$$

Exercice 24.15
En utilisant le changement de variable $\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x+3y \end{cases}$, déterminer les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 4$$

Exercice 24.16 Effectuant le passage en coordonnées polaires, déterminer les applications $\mathcal{C}^2$ vérifiant $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = a\sqrt{x^2+y^2}$.

Extremums

Exercice 24.17
Étudier les minimums des applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad f_2(x,y) = x^2, \quad f_3(x,y) = x^2 + y^4$$

Exercice 24.18 Identifier le maximum et le minimum de : $f(x,y) = xy + 2y^2$
sur l'ensemble $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\right\}$

Exercice 24.19
1. Quels sont les points critiques de la fonction $f(x,y) \mapsto xy + y^2$.
2. Démontrer que $f(x,y) = \left(y + \dfrac{x}{2}\right)^2 - \dfrac{x^2}{4}$.
Le point $(0,0)$ est-il un maximum pour f ? Un minimum ? Un point-selle ?
3. Tracer les lignes de niveau de f de hauteur 0, 1 et -1.

Exercice 24.20 Déterminer les extremums de $x^{\ln(x)} + y^{\ln(y)}$ sur $]0,+\infty[^2$.

Exercice 24.21 Déterminer les extremums de $f : (x,y) \mapsto x^3y^2(1-x+y)$.

Exercice 24.22 Déterminer les extremums de $g : (x,y) \mapsto x^3+y^3-3axy$

Exercice 24.23 Déterminer les extremums de $h : (x,y) \mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$