▶ La fonction logarithme néperien

Définition – *Le logarithme néperien est la fonction, notée* ln, *de* $]0,+\infty[$, *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

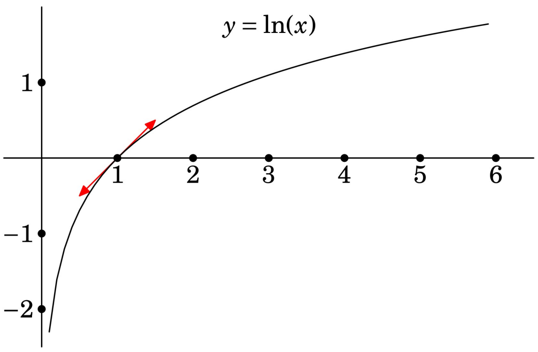
$$\forall x > 0, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

▶ Variations

ln est une fonction continue, dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
$\forall x > 0, \quad \ln^{(2)}(x) < 0$, donc ln est concave, c'est à dire : la courbe représentative de ln est en dessous de ses tangentes.



▶ Limites et croissances comparées

$$\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty \qquad \ln(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$$

$$x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$$

$$\text{si } \alpha > 0, \quad x^\alpha \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$$

▶ Tangentes et branches infinies

La courbe représentative de la fonction ln admet :
- une asymptote verticale d'équation $x = 0$,
- une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$,
- une tangente de pente 1 au point d'abscisse 1.

▶ Relations

- $\forall x, y > 0, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall x > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \ln\left(x^\alpha\right) = \alpha\ln(x)$
- $\forall x > 0, \quad \ln(x) \leq x - 1$
- $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$

▶ La fonction exponentielle

Définition – *La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *qui vérifie :*

$$\begin{cases} & \exp(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} & \exp'(x) = \exp(x) \end{cases}$$

Théorème – *La fonction logarithme néperien réalise une bijection de* $\mathbb{R}^+$ *vers* $\mathbb{R}$ *dont la réciproque est la fonction exponentielle.*

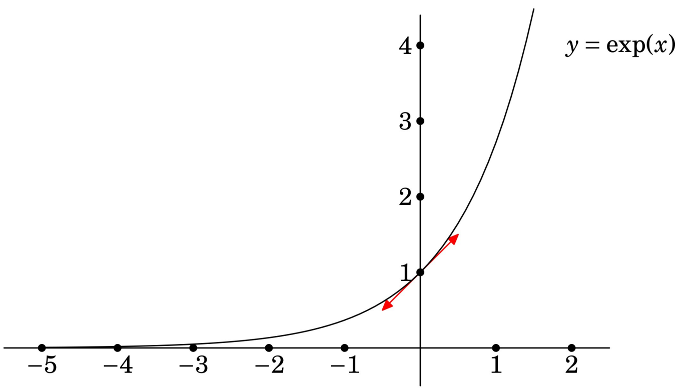
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad y = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y)$$

▶ Variations

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = e^x$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp^{(2)}(x) > 0$, donc exp est convexe, c'est à dire : la courbe représentative de exp est au dessus de ses tangentes.



▶ Limites et croissances comparées

$$\exp(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0 \qquad \exp(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$$

$$x\exp(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0 \qquad \frac{\exp(x)}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad x^\alpha \exp(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0 \qquad \frac{\exp(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$$

▶ Tangente et branches infinies

La courbe représentative de la fonction exponentielle admet :
- une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$,
- une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$,
- une tangente de pente 1 au voisinage de 0.

▶ Relations

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x+y} = e^x e^y \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) = x$
- $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(\ln(y)) = y$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x$

► EXPONENTIELLE DE BASE a

Définition – *Soit $a > 0$. La fonction exponentielle de base a, notée $\exp_a$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$$

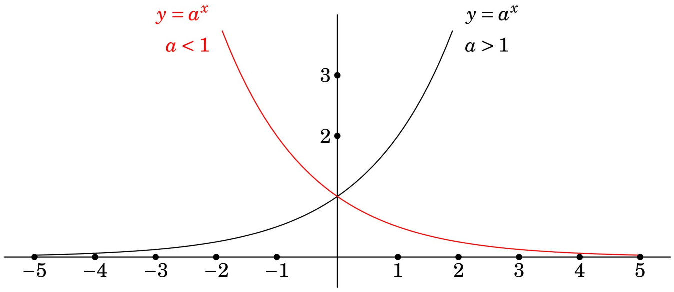
On note : $\exp_a(x) = a^x$

► VARIATIONS

La fonction exponentielle de base a est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a'(x) = \ln(a) a^x$$

Si $a > 1$ (resp. $a < 1$), la fonction exponentielle de base a est strictement croissante, convexe (resp. décroissante, concave) sur $\mathbb{R}$.



► LIMITES

- Si $a > 1$: $\quad a^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \qquad a^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
- Si $a < 1$: $\quad a^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \qquad a^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

► TANGENTE ET BRANCHES INFINIES

La courbe représentative de la fonction exponentielle de base a admet :

- Si $a > 1$:
  - ⇛ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$,
  - ⇛ une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$,
- Si $a < 1$:
  - ⇛ une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$,
  - ⇛ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

► LOGARITHME DE BASE a

Définition – *Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction logarithme de base a, notée $\log_a$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

► RELATIONS

- Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \log_a(\exp_a(x)) = x$
- Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \exp_a(\log_a(x)) = x$

► LES FONCTIONS PUISSANCE

Définition – *Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. La fonction puissance d'exposant a est la fonction f_a définie sur $]0, +\infty[$ par :*

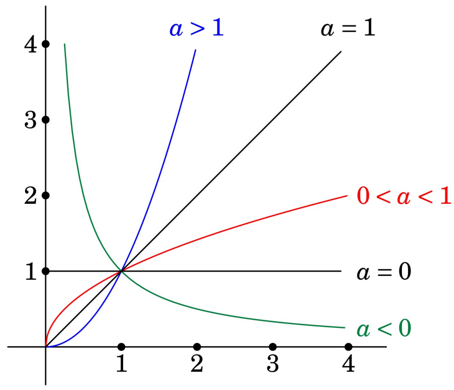
$$\forall x > 0, \quad f_a(x) = x^a = \exp\left(a \ln(x)\right)$$

► VARIATIONS

Les fonctions puissances sont définies, continues et dérivables sur $]0, +\infty[$, de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad f_a'(x) = a x^{a-1}$$

Les fonctions puissances d'exposant $a > 0$ sont strictement croissantes sur $]0, +\infty[$
Les fonctions puissances d'exposant $a < 0$ sont strictement décroissantes sur $]0, +\infty[$



► LIMITES ET BRANCHES INFINIES

- Pour $a > 0$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} x^a = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$

Ces fonctions sont prolongeables par continuité en 0 par $0^a = 0$.
Pour $1 > a > 0$ $\left(\text{par exemple } x \mapsto \sqrt{x}\right)$:
La courbe de $x \mapsto x^a$ admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.

Pour $a > 1$ $\left(\text{par exemple } x \mapsto x^2\right)$:
La courbe de $x \mapsto x^a$ admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

- Pour $a < 0$: $\quad \lim\limits_{x \to 0} x^a = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x^a = 0$

La courbe de $x \mapsto x^a$ admet l'asymptote horizontale (Ox) au voisinage de $+\infty$.
La courbe de $x \mapsto x^a$ admet l'asymptote verticale (Oy) au voisinage de 0

► RELATIONS

- Pour $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

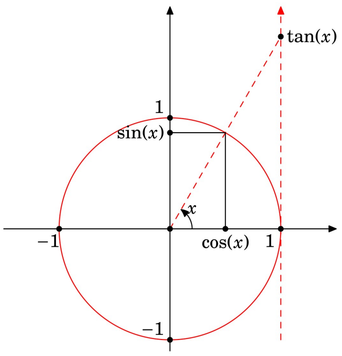
$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$$
$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad \left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

- Soit $q \in \mathbb{N}^*$,

⇛ si q est pair, alors $x \mapsto \sqrt[q]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$
⇛ si q est impair, alors $x \mapsto \sqrt[q]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$
Pour tout $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}} \qquad x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p}$$

➤ Les fonctions trigonométriques



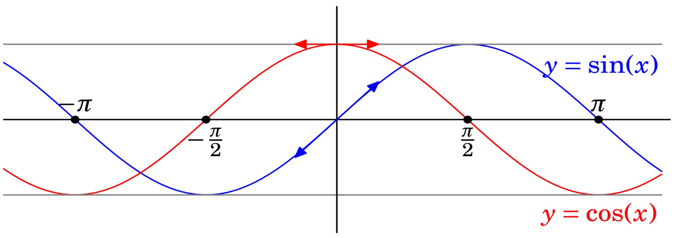
➤ La fonction sinus

La fonction sinus est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $[-1,1]$, de dérivée : $\sin' = \cos$.
La fonction sinus est impaire et périodique de période 2π.
La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

➤ La fonction cosinus

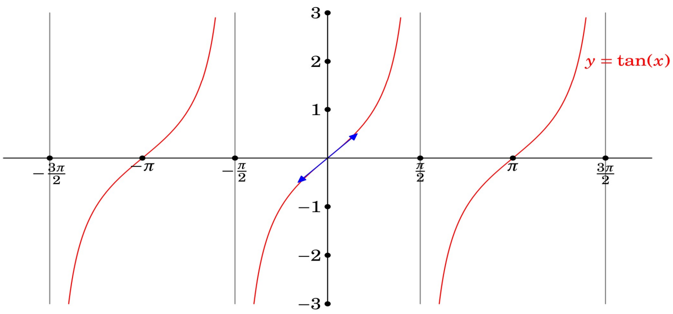
La fonction cosinus est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $[-1,1]$, de dérivée : $\cos' = -\sin$.
La fonction cosinus est paire et périodique de période 2π.
La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ et définit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|$



➤ La fonction tangente

La fonction tangente est définie, continue, dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, de dérivée : $\tan' = 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.



La fonction tangente est impaire et périodique de période π.
Elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

➤ Les fonctions trigo. réciproques

➤ La fonction arcsinus

Définition – *La fonction arcsinus est la fonction réciproque de la fonction sinus sur* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\theta = \mathrm{Arcsin}(x) \iff \begin{cases} \sin(\theta) = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \quad \mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$
- $\forall y \in [-1,1], \quad \sin(\mathrm{Arcsin}(y)) = y$

La fonction arcsinus est définie, continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La courbe représentative de la fonction arcsinus admet une tangente verticale aux points d'abscisse -1 et 1.
La fonction arcsinus est impaire, strictement croissante sur $[-1,1]$ et définit une bijection de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

➤ La fonction arccosinus

Définition – *La fonction arccosinus est la fonction réciproque de la fonction cosinus sur* $[0,\pi]$

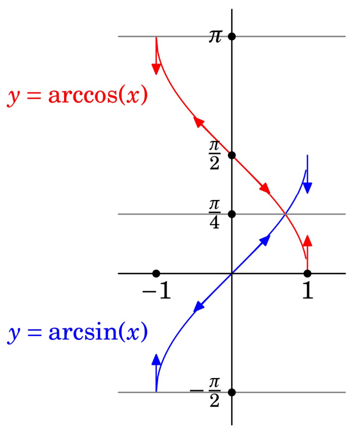
$$\theta = \mathrm{Arccos}(x) \iff \begin{cases} \cos(\theta) = x \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases}$$

- $\forall x \in [0,\pi], \quad \mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x$
- $\forall y \in [-1,1], \quad \cos(\mathrm{Arccos}(y)) = y$

La fonction arccosinus est définie, continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La courbe représentative de la fonction arccosinus admet une tangente verticale aux points d'abscisse -1 et 1.
La fonction arccosinus est strictement décroissante sur $[-1,1]$ et définit une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$



Les courbes représentatives des fonctions arcsinus et arccosinus sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}$:

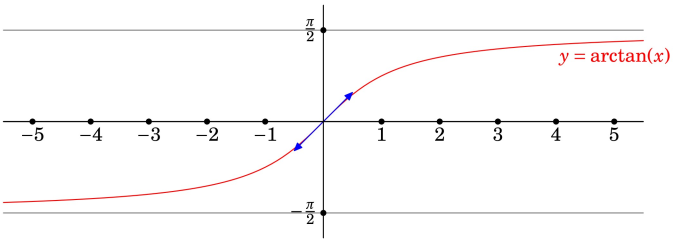
$$\forall x \in [-1,1], \quad \mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$$

► La fonction arctangente

Définition – *La fonction arctangente est la fonction réciproque de la fonction tangente sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\theta = \operatorname{Arctan}(x) \iff \begin{cases} \tan(\theta) = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\operatorname{Arctan}(y)) = y$



La fonction arctangente est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

La fonction arctangente est impaire, strictement croissante sur $[-1,1]$ et définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

La courbe représentative de la fonction arctangente admet l'asymptote horizontale $y = -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et l'asymptote horizontale $y = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

► Les fonctions hyperboliques

Les fonctions cos et sin sont les parties réelles et imaginaire de la fonction exponentielle complexe.

$$\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i} \end{cases}$$

Elles vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
De façon analogue, les fonctions ch et sh sont les parties paires et impaires de la fonction exponentielle réelle :

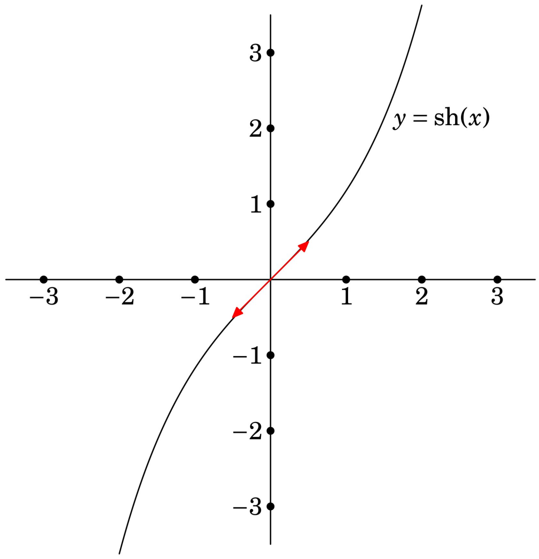
$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) = \dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} \\ \operatorname{sh}(x) = \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} \end{cases}$$

Elles vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$
Si on étend les fonctions cos, sin, ch, sh sur $\mathbb{C}$ par les formules ci-dessus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos(x) \text{ et } \operatorname{sh}(ix) = i\sin(x)$$

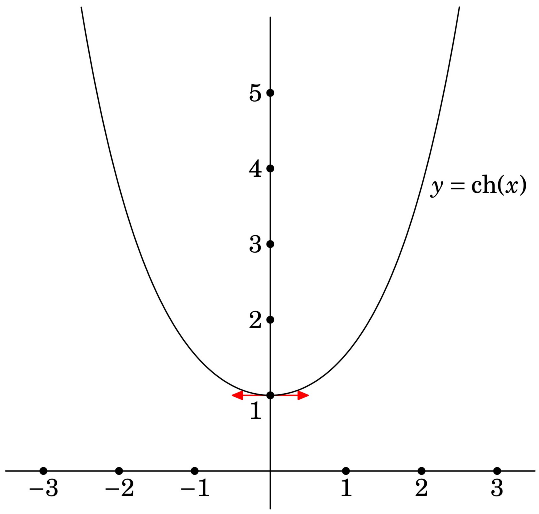
► La fonction sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$, de dérivée : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$
La fonction sinus hyperbolique est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



► La fonction cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$, de dérivée : $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$
La fonction cosinus hyperbolique est paire, strictement croissante sur $[0, +\infty]$. Sa courbe représentative est la "chainette" :

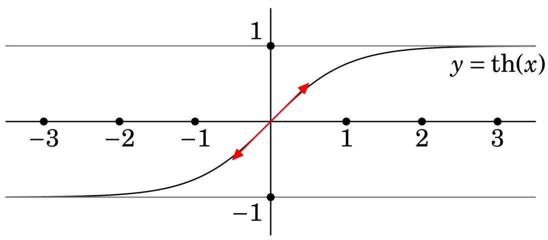


► La fonction tangente hyperbolique

Par analogie avec la fonction tan, on définit la fonction th par :

$$\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$$

La fonction tangente hyperbolique est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée : $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$



La fonction tangente hyperbolique est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
La courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique admet l'asymptote horizontale $y = -1$ en $-\infty$ et l'asymptote horizontale $y = 1$ en $+\infty$.