DS 1

Mercredi 11 septembre 2024 – durée : 2 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Les trois questions sont indépendantes.

1. a) En utilisant la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^n$, calculer les sommes :

$$\alpha_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \alpha_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

b) En utilisant f', calculer :

$$\beta_1 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \qquad \beta_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k}$$

c) Calculer de même : $\gamma = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k(k-1)\binom{n}{k}$

2. Simplifier les expressions :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} e^k - e^{k-1} \qquad b_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^3}{k^2(k+1)}$$

3. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2

Les deux premières parties sont indépendantes.

Partie A

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} \text{ si } t > 0 \text{ et } g(0) = 1$$

1. a) Etablir que $\lim_{t\to 0} g(t) = g(0)$. On dit que g est continue en 0.
   b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. a) Pour tout $t > 0$, calculer $g'(t)$.
   b) En donnant le tableau des variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\varphi : t \mapsto e^t - 1 - t$, prouver que pour tout t réel, $1 + t \leq e^t$.
   c) En déduire le signe de g' et le sens des variations de g.
3. On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0.

Rappel

➜ Une fonction f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.
Le cas échéant, la limite est appelée nombre dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$.

A cet effet, on introduit la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = 1 - t + \dfrac{t^2}{2} - e^{-t}$.

   a) Calculer h' et h'', ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.
   b) Etablir que $0 \leq h''(t) \leq t$.
   c) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq h(t) \leq \dfrac{t^3}{6}$ $(\bigstar)$.
   d) Déduire de la relation $(\bigstar)$ un encadrement de $\dfrac{1-e^{-t}-t}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Prouver finalement que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 1$$

4. a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) > 0$.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c) Prouver que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-2x}(2x + 1 - e^x(x+1))$.
   d) Utilisant la question A2b), montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) \leq 0$.
5. Vérifier que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2g(2x) - g(x)$, où g est la fonction définie dans la première partie.
   En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
6. Construire la courbe représentative de f, le plan étant rapporté à un repère orthonormé d'unité 4cm.

Partie C

On étudie maintenant la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$.
On ne cherchera pas à calculer cette intégrale !
On rappelle que F, ainsi définie, est la primitive de f s'annulant en 0.

7. a) Étudier le sens de variation de F.
   b) Établir que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.
   En déduire que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq F(t) \leq 1$.
8. Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(x)\mathrm{d}x$.
   a) En utilisant la relation de la question B.2), prouver que pour $t \geq 0$, $F(t) = G(2t) - G(t)$.
   b) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $F(t) = \displaystyle\int_t^{2t} g(x)\mathrm{d}x$.
   c) Établir que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{x} - g(x) \leq e^{-x}$.
   En déduire que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \ln(2) - F(t) \leq e^{-t}$.
   d) Prouver finalement que $F(t)$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Exercice 3

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$$

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 1$.
   b) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
   b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$$

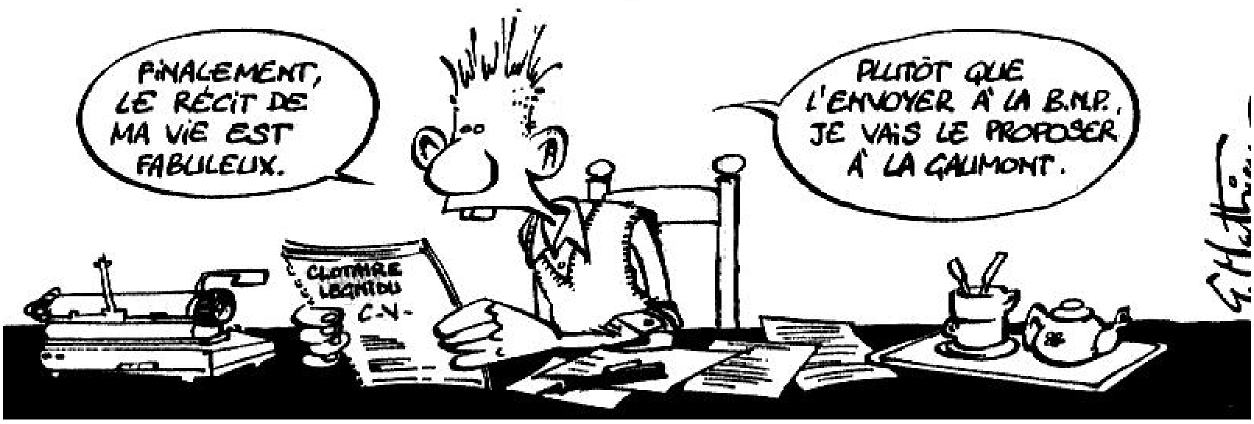
   c) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=0}^{n} v_k^2$$

FIN DE L'ÉNONCÉ


POUR AVOIR L'AIR
ENCORE PLUS MALIN
IL FAUDRAIT QUE JE M'ENTOURE DE GENS
QUI ONT L'AIR PLUS CON QUE MOI
MAIS
JE N'EN TROUVE PAS


ATTENTION, NOUS NE PRENONS QUE DEUX CANDIDATS SUR CINQUANTE.
BON. JE VAIS ESSAYER DE TROUVER UN COPAIN.


FINALEMENT, LE RÉCIT DE MA VIE EST FABULEUX.
CLOTAIRE LEGNIDU C.V.
PLUTÔT QUE L'ENVOYER À LA B.N.P., JE VAIS LE PROPOSER À LA GAUMONT.