Proposition de corrigé du devoir surveillé 1

Exercice 1

1. a) Soit f la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$. D'après la formule du binôme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Ainsi,

- Lorsque $x = 1$: $\boxed{\alpha_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = f(1) = 2^n}$
- Lorsque $x = -1$: $\boxed{\alpha_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = f(-1) = 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}}$

b) f est une fonction polynômiale, donc dérivable, de dérivée :

$$f'(x) = n\big(1+x\big)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

Il vient :

- Lorsque $x = 1$: $\boxed{\beta_1 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = f'(1) = n2^{n-1}}$
- Lorsque $x = -1$ et $n \geq 1$:

$$\boxed{\beta_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = -f'(-1) = -n0^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ -1 & \text{si } n = 1 \end{cases}}$$

Et $\boxed{\text{lorsque } n = 0,\ \beta_2 = 0.}$

c) En dérivant une deuxième fois :

$$f''(x) = n(n-1)\big(1+x\big)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$$

Lorsque $x = -1$ et $n \geq 2$:

$$\boxed{\gamma = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k(k-1) \binom{n}{k} = f''(-1) = n(n-1)0^{n-2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 2 \\ 2 & \text{si } n = 2 \end{cases}}$$

Et $\boxed{\text{lorsque } n \leq 1,\ \gamma = 0.}$

2. Nous identifions une somme et un produit téléscopiques :

$$\boxed{a_n = \sum_{k=1}^{n} e^k - e^{k-1} = e^n - 1} \qquad \boxed{b_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^3}{k^2(k+1)} = \frac{2}{n^3(n+1)}}$$

Détails de la téléscopie :

$$\begin{array}{rl} & e^1 - e^0 \\ & e^2 - e^1 \\ & e^3 - e^2 \\ & \vdots \\ & e^{n-1} - e^{n-2} \\ + & e^n - e^{n-1} \\ \hline & a_n = e^n - e^0 \end{array}$$

$$b_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^3}{k^2(k+1)} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^3}{k^3} \frac{k}{k+1} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \right)^3 \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n^3} \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n^3(n+1)}$$

3. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

- Initialisation : Lorsque $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k k^2 = 0 \text{ et } (-1)^0 \frac{0(0+1)}{2} = 0$$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

- Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 &= \underbrace{0^2 - 1^2 + 2^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)^2}_{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k^2} + (-1)^n n^2 \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)n}{2} + (-1)^n n^2 \\ &= (-1)^n \frac{n}{2} \left[-(n-1) + 2n \right] = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}}$

Exercice 2

Partie A

1. a) Cette limite est proche d'une limite usuelle : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Rappelons que cette limite est simplement l'écriture de la dérivabilité de la fonction exp en 0 :

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

De plus, $\lim\limits_{t\to 0} -t = 0$. Par <u>composition de limites</u> on obtient quand $t \to 0$:

$$\frac{e^{-t} - 1}{-t} = \frac{1 - e^{-t}}{t} \to 1 = g(0)$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{t\to 0} g(t) = g(0)}$.

b) La limite en $+\infty$ ne donne pas de forme indéterminée : $1 - e^{-t} \to 1 - 0 = 1$.
Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = 0}$.

2. a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g'(t) = \frac{e^{-t}t - (1 - e^{-t})}{t^2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall t > 0,\ g'(t) = \dfrac{e^{-t}(t+1) - 1}{t^2}}$.

b) La fonction $\varphi : t \mapsto e^t - 1 - t$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(t) = e^t - 1$.
On obtient le tableau suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$\varphi(t)$		$+$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ 1 + t \leq e^t}$.

c) Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, considérant que $e^{-t} > 0$:

$$e^t - 1 - t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t}\left(e^t - 1 - t\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - (1+t)e^{-t} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad g'(t) \leq 0$$

Ainsi, $\boxed{g' \text{ est négative et } g \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

3. a) La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ h'(t) = -1 + t + e^{-t} \quad h''(t) = 1 - e^{-t} \quad h(0) = 0 \text{ et } h'(0) = 0}$$

b) D'après A2b), on a que $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t \leq e^t$ et donc, pour tout $t \geq 0$, $(-t \in \mathbb{R})$

$$1 - t \leq e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-t} = h''(t) \leq t$$

De plus $e^{-t} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 1 - e^{-t}$. Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq h''(t) \leq t.}$

c) La fonction h'' est continue, les fonctions $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t$ aussi.
Le théorème de croissance de l'intégrale sur $[0,t]$ avec $t \geq 0$:

$$\int_0^t 0\mathrm{d}x \leq \int_0^t h''(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^t x\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq h'(t) - h'(0) \leq \frac{t^2}{2} - 0$$

Ainsi, $\forall t \geq 0,\ 0 \leq h'(t) \leq \frac{t^2}{2}$.
Appliquant à nouveau le théorème de croissance de l'intégrale sur $[0,t]$ avec $t \geq 0$:

$$\int_0^t 0\mathrm{d}x \leq \int_0^t h'(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^t \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq h(t) - h(0) \leq \frac{t^3}{6} - 0$$

Ainsi, $\boxed{\forall t \geq 0,\ 0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}}$.

d) Soit $t > 0$, d'après A3c)

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - t - e^{-t} + \frac{t^2}{2} \leq \frac{t^3}{6} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{1 - e^{-t} - t}{t^2} + \frac{1}{2} \leq \frac{t}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{1 - e^{-t} - t}{t^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{t}{6} \end{aligned}$$

⇛ *On pense à travailler sur $\mathbb{R}_+^*$ pour ne pas diviser par zéros*

Ainsi, $\boxed{\forall t > 0, \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{1 - e^{-t} - t}{t^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{t}{6}}$

Considérons le taux de variation de g en 0 :

$$\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{\frac{1-e^{-t}}{t} - 1}{t} = \frac{1 - t - e^{-t}}{t^2}$$

Nous venons d'établir un encadrement de cette expression.
Or $\lim\limits_{t \to 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{2} + \frac{t}{6} = -\frac{1}{2}$.
Le théorème des encadrements donne que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $\boxed{g \text{ est dérivable en 0 et } g'(0) = -\frac{1}{2}}$.

Partie B

4. a) On a $f(0) = 1 \geq 0$. Pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) = \frac{e^{-x}}{x}(1 - e^{-x})$$

Les trois facteurs sont strictement positifs sur $\mathbb{R}_+^*$; ainsi, $\boxed{\forall x \geq 0,\ f(x) > 0}$.

b) La limite en $+\infty$ n'est pas une forme indéterminée : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$.

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{(-e^{-x} + 2e^{-2x})x - (e^{-x} - e^{-2x})}{x^2} = \frac{(2x+1)e^{-2x} - e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-2x}(2x + 1 - e^x(x+1))}$.

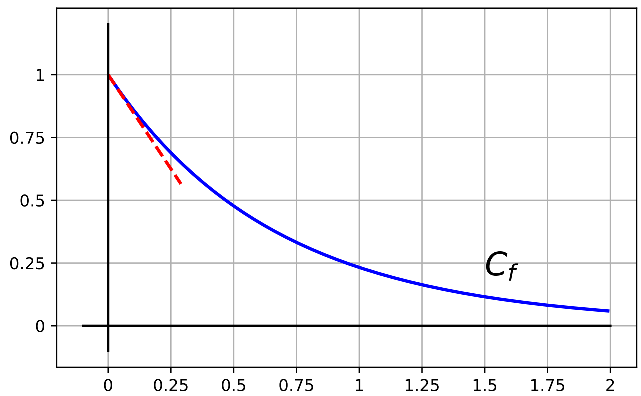
d) D'après A2b) pour $x > 0$, on a : $1+x \leq e^x$. En particulier $1 \leq e^x$ et donc $x \leq xe^x$. Par sommation des inégalités on obtient :

$$1 + x + x \leq e^x + xe^x \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2x \leq e^x(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2x - e^x(1+x) \leq 0$$

De plus, $x > 0$ et $e^{-2x} > 0$ donc $f'(x) \leq 0$.
Ainsi, $\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) \leq 0}$.
5. Soit $x > 0$,

$$2g(2x) - g(x) = 2\frac{1 - e^{-2x}}{2x} - \frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{1 - e^{-2x} - 1 + e^{-x}}{x} = f(x)$$

De plus, $2g(0) - g(0) = 2 - 1 = 1$ et $f(0) = 1$.
Ainsi, $\boxed{\forall x \geq 0,\ f(x) = 2g(2x) - g(x)}$.
Par composition et somme d'applications dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donc en 0.
En particulier, pour $x > 0$, $f'(x) = 4g'(2x) - g'(x) \to 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{3}{2}}$.
6. La courbe de f :



Partie C

7. a) La fonction F est la primitive de f qui s'annule en 0 : $\forall x \geq 0,\ F'(x) = f(x)$.
D'après B4a) et $f(0) = 1$, on a $f > 0$. $\boxed{\text{La fonction } F \text{ est strictement croissante}}$.
b) Pour $x = 0$, $f(0) = 1$ et $e^0 = 1$, donc $0 \leq f(0) \leq e^{-0}$.
Soit $x > 0$, d'après B4a), $0 \leq f(x)$. De plus,

$$e^{-x} - f(x) = e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} = \frac{e^{-x}}{x}(x - 1 + e^{-x})$$

D'après A2b), pour $t = -x$, $1 - x \leq e^{-x} \quad \Rightarrow \quad x - 1 + e^{-x} \geq 0$.
Enfin, $x > 0$ et $e^{-x} > 0$; donc, $e^{-x} - f(x) \geq 0$. Ainsi, $\boxed{\forall x \geq 0,\ 0 \leq f(x) \leq e^{-x}}$.
Soit $t \geq 0$. Les applications $x \mapsto 0$, $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues.
Le théorème de croissance de l'intégrale sur $[0, t]$ donne :

$$\int_0^t 0\mathrm{d}x \leq \int_0^t f(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^t e^{-x}\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq F(t) \leq 1 - e^{-t}$$

De plus, comme $e^{-t} > 0$, donc $1 - e^{-t} < 1$.
Ainsi, $\boxed{\forall t \geq 0,\ 0 \leq F(t) \leq 1}$.
8. a) La fonction G est la primitive de G qui s'annule en 0.
Ainsi, $t \mapsto G(2t) - G(t)$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto 2g(2t) - g(t)$.
D'après B5), on a donc pour tout $x \geq 0$: $F'(t) = f(t) = 2g(2t) - g(t) = (G(2t) - G(t))'$.
Ainsi, les deux fonctions ont la même dérivée, elle sont donc des primitives d'une même fonction et donc diffèrent d'une constante.
De plus, $F(0) = 0$ et $G(2 \times 0) - G(0) = 0$: elles sont égales en 0.
Ainsi, $\boxed{\forall t \geq 0,\ F(t) = G(2t) - G(t)}$.
Attention ! Il est important de noter que deux fonctions ayant la même dérivée diffère d'une constante. Il faut établir que cette constante est nulle pour montrer leur égalité.
b) Soit $t \geq 0$, comme G est une primitive de g, on a :

$$G(2t) - G(t) = [G(x)]_t^{2t} = \int_t^{2t} g(x)\mathrm{d}x$$

Ainsi, d'après C8a), $\boxed{\forall t \geq 0,\ F(t) = \int_t^{2t} g(x)\mathrm{d}x}$. ⇛ *On peut aussi utiliser Chasles.*
c) Soit $x \geq 1$, $\frac{1}{x} - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ car $x \geq 1$
La positivité est évidente. Ainsi, $\boxed{\forall x \geq 1,\ 0 \leq \frac{1}{x} - g(x) \leq e^{-x}}$.
Soit $t \geq 1$, alors pour tout $x \in [t, 2t]$, $0 \leq \frac{1}{x} - g(x) \leq e^{-x}$.
Le <u>théorème de croissance de l'intégrale</u> donne :

$$\begin{aligned}\int_t^{2t} 0\mathrm{d}x \leq \int_t^{2t} \frac{1}{x} - g(x)\mathrm{d}x \leq \int_t^{2t} e^{-x}\mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq [\ln(x) - G(x)]_t^{2t} \leq [-e^{-x}]_t^{2t} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \ln(2t) - G(2t) - \ln(t) + G(t) \leq -e^{-2t} + e^{-t} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \ln(2) - F(t) \leq e^{-t}(1 - e^{-t}) \leq e^{-t}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall t \geq 1,\ 0 \leq \ln(2) - F(t) \leq e^{-t}}$.
d) Lorsque $t \to +\infty$, on a $e^{-t} \to 0$.
Par <u>encadrement</u>, on obtient : $\ln(2) - F(t) \to 0$ c'est-à-dire $F(t) \to \ln(2)$.
Ainsi, $\boxed{\lim_{+\infty} F = \ln(2)}$.

Exercice 3

1. a) Montrons par <u>récurrence</u> que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

- <u>Initialisation :</u> On a $u_0 = 0 \in [0,1]$. La relation est vraie au rang 0.
- <u>Hérédité :</u> Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \in [0,1]$.

  La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$ est dérivable et $f' : x \mapsto x$ est positive sur $[0,1]$; ainsi, f est croissante sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 \quad & \Rightarrow \quad f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \\ & \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 \\ & \Rightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

  La relation est vraie au rang $n+1$.
- <u>Conclusion :</u> $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1].}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

c) Comme la suite est croissante et majorée par 1, le <u>théorème de limite monotone</u> donne que la suite converge. Posons ℓ la limite.

Ainsi, $u_n \to \ell$ donc $u_{n+1} \to \ell$ et par continuité de $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$, $f(u_n) \to \dfrac{\ell^2+1}{2}$.

Par <u>unicité de la limite</u>, ℓ est solution de :

$$x = \frac{x^2+1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers 1.}}$

2. a) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k - v_{k+1} = 1 - u_k - 1 + \frac{u_k^2+1}{2} = \frac{u_k^2 - 2u_k + 1}{2} = \frac{(u_k-1)^2}{2} = \frac{v_k^2}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ v_k - v_{k+1} = \dfrac{v_k^2}{2}.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on reconnait une <u>somme téléscopique</u> : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n$.

Pour ceux qui n'identifient pas la somme téléscopique, on peut toujours effectuer un changement d'indice après avoir séparer les termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \underset{\boxed{j=k+1}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{j=1}^{n} v_j = v_0 - v_n$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n.}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k^2 = \sum_{k=0}^{n} 2(v_k - v_{k+1}) = 2\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = 2(v_0 - v_{n+1})$$

Or $u_n \to 1$ donc $v_n \to 0$ et $v_0 = 1 - 0 = 1$ donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} v_k^2 \to 2}$.