Colle 4

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

1. Nombres complexes

a. Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire.

La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.

Opérations sur les nombres complexes.

Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel d'un repère orthonormé direct ("plan complexe").

b. Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.

Image du conjugié dans le plan complexe.

Module.

Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.

Relation $|z|^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

c. Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble ds nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.

Notation $\mathbb{U}$.

Exponentielle d'une somme.

Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.

Formule de Moivre.

Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

d. Formes trigonométriques

Forme trigonométrique $r\exp(i\theta)$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$.

e. Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.

Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

Somme et produit des racines.

f. Racines n-ièmes

Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation $\mathbb{U}_n$.

Représentation géométrique.

g. Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}\, z} e^{i\mathrm{Im}(z)}$.

Notations $\exp(z)$, e^z. Module et argument de e^z.

Exponentielle d'une somme.

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.

h. Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{c-b}{c-a}$

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Interprétation géométrique des applications $z \longmapsto az+b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

Interprétation géométrique de la conjugaison.

L'étude générale des similitudes est hors programme.

2. Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

A. Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

d. Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	

Méthodes et savoir-faire

- Manipulation des fonctions trigonométriques (résoudre des équations et inéquations, transformer une somme en produit, linéariser, transformer $\cos(nt)$ en un polynôme en $\cos(t)$)
- Utiliser la forme trigonométrie ($1 \pm e^{it}$, $e^{iu} \pm e^{iv}$, racines nième)
- Utiliser la forme algébrique (racine carrée)
- Utiliser le lien entre les racines et les coefficients d'un trinôme
- Manipuler une fonction à valeurs complexes
- Aborder la géométrie du plan (point, vecteur, angle, alignement, orthogonalité, similitudes directes)

Questions de cours

➜ Définir les notions (et les propriétés associées) de conjugué, module, argument, formes algébriques et trigonométriques ; citer les formules d'Euler et de Moivre.

★ Inégalité triangulaire et cas d'égalité.

★ Présenter la technique de *l'angle moitié* pour factoriser $e^{ip} \pm e^{iq}$ et en déduire les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.

➜ Citer et retrouver les formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(p) + \cos(q)$, $\tan(a \pm b)$, $\tan(2a)$ et $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$.

★ Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ (exercice 3.6)

★ Savoir exprimer $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.
Mettre en oeuvre lors de la résolution d'une équation de votre choix.

★ Définir ce que signifie linéariser une expression trigonométrique.
Mettre en oeuvre lors du calcul d'une intégrale de votre choix.

★ Introduction de $\mathbb{U}_n$ (lemme), théorème sur les racines nième d'un nombre complexe.

➜ Définition d'une racine carrée. Décrire les outils pour les calculer (formes algébrique et trigonométrique). Présenter un exemple pour chacune des deux situations.

➜ Interprétation géométrique des nombres complexes : affixe, module, argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$, alignement, orthogonalité, translations, homothéties, rotations, applications $z \mapsto az + b$

★ Définir la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes et les opérations associées.
Établir $(\exp(\varphi))' = \varphi' \exp(\varphi)$ où $\varphi \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.