

# Colle 5

Les questions "★" sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

## EXTRAIT DU PROGRAMME

### 1. TECHNIQUES FONDAMENTALES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

#### B. PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

##### A. CALCUL DE PRIMITIVES

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

Primitives des fonctions exponentielles, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques et des fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Intégration par parties, changement de variable.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue  $f$ ,  $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$  a pour dérivée  $f$ .

On pourra noter  $\int^x f(t)dt$  une primitive générique de  $f$ .

Primitives de  $x \mapsto \exp(\lambda x)$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , application aux primitives de  $x \mapsto \exp(ax) \cos(bx)$  et  $x \mapsto \exp(ax) \sin(bx)$ .

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

## MÉTHODES ET SAVOIR-FAIRE

- Mettre en oeuvre une IPP, un changement de variable
- Manipuler une intégrale dépendant de ses bornes
- Calcul de primitives de fonction quasi-usuelles :  $u'f(u)$ ,  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ,  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$
- Primitivation de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  et  $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$

## QUESTIONS DE COURS

- Primitive, existence, unicité, intégrale, dérivée d'une intégrale dépendant de ses bornes
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, Chasles, positivité et son corollaire
- Primitive de fonctions usuelles
- Primitivation de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  : décrire la démarche générale ou traiter un exemple pour chacune des trois situations. Primitive de  $x \mapsto \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}$
- ★ Primitivation de  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ . Traiter le cas  $x \mapsto e^{-2x} \sin(3x)$
- ★ Intégration par parties. Calcul de  $\int_1^e \ln(t)^2 dt$ .
- ★ Changement de variable. Calcul de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(u)}{1 + \cos(u)} du$  en posant  $v = \cos(u)$ .