Colle 8

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

1. Calcul matriciel et systèmes linéaires

a. Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation A^{T}.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	

b. Opérations élémentaires

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	

c. Systèmes linéaires

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les X_0+Y, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

d. Anneau des matrices carrées

Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notations $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'une transposée.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

Méthodes et savoir-faire

- Mise en oeuvre du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire (formalisme libre)
- Étude de l'inversibilité d'une matrice (formalisme libre)
- Calculer des produits de matrices
- Suivre une démarche proposée pour calculer la puissance nième d'une matrice :
  - ⇛ en travaillant à partir d'une matrice réduite (souvent diagonale) : $A = PDP^{-1}$
  - ⇛ en utilisant la formule du binôme : $A^n = (I + N)^n$

Questions de cours pratiques

➜ Introduire tout le vocabulaire lié au système linéaire (système homogène, second membre, matrice associée, coefficients, système compatible, etc.), structure de l'ensemble des solutions, opérations élémentaires.

➜ Expliciter les étapes de la méthode du pivot de Gauss sur un exemple de votre choix avec le formalisme de votre choix. Introduire verbalement le vocabulaire associé (pivot, inconnue principale, inconnue secondaire, équation de compatibilité).

➜ Formule du produit de deux matrices. Donner un exemple qui illustre que le produit matriciel n'est ni commutatif, ni intègre (diviseurs de zéros). Propriétés (distributivité, transposition, associativité, produit avec I_n, ...) en veillant à bien définir la taille des matrices manipulées. Formule du binôme.

➜ Formule du produit de deux matrices. Faire le lien entre les opérations élémentaires sur les lignes (resp. sur les colonnes) et le produit par une matrice à gauche (resp. à droite) ; donner des exemples.

➜ Donner un exemple de chaque matrice particulière (ligne, colonne, diagonale, triangulaire supérieure, identité, élémentaire $E_{i,j}$, nilpotente). Définir la transposition et donner quelques propriétés (produit, inverse, ...). Matrice symétrique, antisymétrique.

★ Donner la définition d'une matrice (carrée) inversible et la CNS d'inversibilité sous forme d'un système.
Étudier l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

★ Inversibilité d'une matrice de taille 2×2. Donner un exemple.

★ Donner la définition d'une matrice (carrée) inversible puis établir la CNS suivante :

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ inversible si et seulement si } \left\{ \begin{array}{c} \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : \\ AX = Y \quad \Leftrightarrow \quad X = BY \end{array} \right.$$

En particulier $B = A^{-1}$.