Colle 9

Les questions "★ " sont avec un développement (démonstration, exemple, exercice).

Extrait du programme

1. Nombres réels et suites numériques

Ensembles de nombres usuels

Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme.
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.	
Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	

b. Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$.	Notations $\sup X$, $\inf X$
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.	

c. Généralités sur les suites réelles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	

d. Limite d'une suite réelle

Limite finie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notation $u_n \leftarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente.	
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.

e. Suites monotones

Théorème de la limite monotone.
Théorème des suites adjacentes.

g. Traduction séquentielle de certaines propriétés

Partie dense de $\mathbb{R}$.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.
Caractérisation séquentielle de la densité.	Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Si X est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$.	Résultats analogues pour X non vide minorée.

Méthodes et savoir-faire

- Étudier la monotonie éventuelle d'une suite
- Étudier une suite définie implicitement
- Reconnaître et utiliser les propriétés des suites adjacentes

Questions de cours

★ Borne supérieure [inférieure] : définition, écriture avec des quantificateurs, unicité, existence.
Exercice de TD : Montrer que si X est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup(X)$.

★ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

➜ Citer les théorèmes liés à la convergence et donner un exemple d'utilisation : unicité de la limite, passage à la limite, encadrement, limite monotone.

★ Théorème d'encadrement

★ Donner la définition de la densité sur $\mathbb{R}$ et établir la caractérisation séquentielle de la densité.
Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

★ Définition Convexité sur $\mathbb{R}$. Établir la caractérisation des intervalles comme les parties convexes de $\mathbb{R}$.

★ Théorème d'unicité de la limite

★ Toute suite convergente est bornée

★ Théorème de limite monotone

➜ Définir des suites adjacentes, propriétés et théorème de convergence :

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$,

(ii) $\dfrac{u_n+v_n}{2}$ est une valeur approchée de ℓ à $\dfrac{v_n-u_n}{2}$ près.

$$\left|\ell - \frac{u_n+v_n}{2}\right| \leq \frac{v_n-u_n}{2}$$

Expliquer le principe de dichotomie et savoir le mettre en place en Python pour approximer une racine d'une fonction.

```python
def dicho_f(f,a,b,p):
    assert f(a)*f(b)<0,'ENC'
    while abs(b-a)>2*p:
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<=0:
            b=c
        else:
            a=c
    return (a+b)/2
```