Corrigé du DM 1

Coefficients binomiaux

1. Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

a) Dénombrons les parties de E à 5 éléments qui contiennent :

(i) a et b : il s'agit de choisir les 3 autres éléments parmi les 10 restant (E privé de a et b), il y a $\binom{10}{3}$ possibilités

(ii) a mais pas b : il s'agit de choisir les 4 autres éléments parmi les 10 restant, il y a $\binom{10}{4}$ possibilités

(iii) b mais pas a : il y a $\binom{10}{4}$ possibilités

(iv) ni a, ni b : il y a $\binom{10}{5}$ possibilités

b) On sait qu'il y a $\binom{12}{5}$ partie de E à 5 éléments. La disjonction de cas ci-dessus sur le fait que a ou b appartiennent à la partie de 5 éléments donne :

$$\boxed{\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}}$$

c) Soit $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ un ensemble. Le nombre de ses parties à p éléments est $\binom{n}{p}$.

Effectuons une disjonction de cas, comme ci-dessus, suivant l'appartenance de x_1 ou x_2 à la partie :

(i) avec x_1 et x_2 : il s'agit de choisir les $p-2$ autres éléments parmi les $n-2$ restant, il y a $\binom{n-2}{p-2}$ possibilités

(ii) avec x_1 mais pas x_2 : il y a $\binom{n-2}{p-1}$ possibilités

(iii) avec x_2 mais pas x_1 : il y a $\binom{n-2}{p-1}$ possibilités

(iv) sans x_1, ni x_2 : il y a $\binom{n-2}{p}$ possibilités.

Ainsi, $\boxed{\text{pour } 2 \leq p \leq n, \text{ on a } \binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.}$

d) Soit $p \in [\![2, n]\!]$ alors la formule de Pascal donne :

$$\begin{aligned}\binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p} &= \left(\binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p-1}\right) + \left(\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}\right)\\ &= \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}\end{aligned}$$

2. Soit $0 \leq q \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p}\binom{p}{q} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\ \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{n!}{(n-p)!q!(p-q)!}$$

$$\binom{n}{q}\binom{n-q}{n-p} = \frac{n!}{q!(n-q)!}\ \frac{(n-q)!}{(n-p)!(p-q)!} = \frac{n!}{q!(n-p)!(p-q)!}$$

Ainsi, $\boxed{\text{si } 0 \leq q \leq p \leq n : \binom{n}{p}\binom{p}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{n-p}.}$

Raisonnements

1. a) La phase *analyse* :

(i) Considérant $x = y = 0$, alors $f(0)^2 - f(0) = 0$ donc $f(0)$ est solution de $x^2 - x = 0$ c'est-à-dire $x(x-1) = 0$. Ainsi, $\boxed{f(0) \in \{0, 1\}.}$

(ii) Considérant $x = 1$ et $y = 0$, alors $f(1)f(0) - f(0) = 1$.
$f(0) = 0$ est impossible donc $f(0) = 1$ et par suite $f(1) - 1 = 1$ donc $f(1) = 2$.
Ainsi, $\boxed{f(0) = 1 \text{ et } f(1) = 2.}$

(iii) Considérant $y = 0$, alors $f(x) - 1 = x$ c'est-à-dire $\boxed{f : x \mapsto x + 1.}$

b) La phase *synthèse* : On considère la fonction $f : x \mapsto x + 1$:

$$f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y$$

Ainsi, $\boxed{x \mapsto x + 1 \text{ est la seule fonction solution du problème.}}$

2. Travaillons par disjonction de cas sur le signe de $x - 1$:

- si $x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 1$

$$x - 1 \leq x^2 - x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + 1 \geq 0 \quad \text{(qui est vrai)}$$

- si $x - 1 < 0$, c'est-à-dire $x < 1$

$$1 - x \leq x^2 - x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 0 \quad \text{(qui est vrai)}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ |x - 1| \leq x^2 - x + 1.}$

3. Soit n, la somme de deux carrés. Les valeurs possibles du reste de la division de n par 4 sont 0, 1, 2 ou 3. Pour déterminer les valeurs atteintes, effectuons une disjonction des cas suivant la parité des deux nombres :

- les deux sont pairs : $\exists k, k' \in \mathbb{Z};\ n = (2k)^2 + (2k')^2$ alors $n = 4(k^2 + k'^2)$ et le reste est 0.
- il y a un pair et un impair : $\exists k, k' \in \mathbb{Z};\ n = (2k+1)^2 + (2k')^2$ alors $n = 4(k^2 + k + k'^2) + 1$ et le reste est 1.
- les deux sont impairs : $\exists k, k' \in \mathbb{Z};\ n = (2k+1)^2 + (2k'+1)^2$ alors $n = 4(k^2 + k + k'^2 + k') + 2$ et le reste est 2.

Ainsi, $\boxed{\text{si } n \text{ est la somme de deux carrés alors le reste de la division de } n \text{ par 4 est différent de 3.}}$