DM 1

à rendre le mercredi 18 septembre 2024

Coefficients binomiaux

1. Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.
   a) Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :
      (i) a et b ;
      (ii) a mais pas b ;
      (iii) b mais pas a ;
      (iv) ni a, ni b.
   b) En déduire la relation : $\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$.
   c) Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2 \leq p \leq n$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$

   d) Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.
2. Montrer que si $0 \leq q \leq p \leq n$: $\binom{n}{p}\binom{p}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{n-p}$

Raisonnements

1. On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

On va procéder par analyse-synthèse.
   a) La phase *analyse* aussi appelée *condition nécessaire* permet d'identifier les caractéristiques ou l'expression d'un objet solution au problème.
      (i) Considérant $x = y = 0$, en déduire les valeurs possibles de $f(0)$.
      (ii) Considérant $x = 1$ et $y = 0$, en déduire $f(0)$ et $f(1)$.
      (iii) Considérant $y = 0$, donner l'expression nécessaire de f.
   b) La phase *synthèse* aussi appelée *condition suffisante* permet de vérifier que l'expression obtenue ci-avant est bien solution.
   Résoudre l'équation fonctionnelle.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
3. Démontrer que si n est la somme de deux carrés alors le reste de la division de n par 4 ne peut jamais être 3.