

# DM 2

à rendre le vendredi 27 septembre 2024

## Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x^x$$

et on note  $\mathcal{C}$  son graphe.

1. Identifier l'ensemble de définition de  $f$  et étudier les variations de  $f$

On précisera sa valeur en  $e^{-1}$  et ses limites en 0 et en  $+\infty$ .

2. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x \ln(x)$$

3. Donner une équation cartésienne de la tangente  $\Delta$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1. Quelle est la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\Delta$  ?

4. Montrer que  $f$  définit une bijection de  $I = [e^{-1}, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

On note  $\varphi$  la bijection réciproque.  $\varphi$  est elle continue ? monotone ?

5. Démontrer que, pour tout  $y \in J$  :

$$\ln(\varphi(y)) = \frac{\ln(y)}{\varphi(y)}$$

6. Montrer

$$\frac{\varphi(y)}{\ln(y)} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$$

7. Démontrer que  $\varphi$  est dérivable sur un intervalle  $K$  à déterminer et que :

$$\forall y \in K, \quad \varphi'(y) = \frac{\varphi(y)}{y(\varphi(y) + \ln(y))}$$

## Exercice 2

8. Résoudre l'équation d'inconnue  $x$  :

$$\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \operatorname{Arcsin}(x)$$