Corrigé du DM 2

Exercice 1

1. **Ensemble de définition et variations**
$f(x) = \exp(x\ln(x))$ est défini lorsque $\ln(x)$ est défini : f est donc définie sur $\left]0, +\infty\right[$.
ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par croissance comparée, $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp(0) = 1}$. De plus $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty.}$
Remarque : On dit que f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Posons $f = \exp(u)$ avec $u : x \mapsto x\ln(x)$. Donc $f' = u' \exp(u)$ a le signe de u' :

$$u'(x) = \ln(x) + x \times \left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x) + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x > e^{-1}$$

Lorsque $x = e^{-1}$, $\ln(x) = -1$ donc $f(x) = \exp(x\ln(x)) = \exp(-x) = e^{-\frac{1}{e}}$.
Ainsi, f est donc définie sur $\left]0, +\infty\right[$ et

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **Une inégalité vérifié par $x\ln(x)$**
Soit $x > 0$. Étudions le signe de $x\ln(x) - \ln(x) = (x-1)\ln(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln(x)$		$+$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x\ln(x)}$

3. **Tangente au point d'abscisse** 1
$f(1) = 1^1 = 1$ et $f'(1) = u'(1)\exp(u(1)) = (\ln(1) + 1)\exp(1\ln(1)) = 1 \times \exp(0) = 1$.
La tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est la droite d'équation :

$$y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$$

Ainsi, après simplification, $\boxed{\Delta \text{ a pour équation } y = x.}$
D'après la question précédente : $\forall x > 0, \quad \ln(x) \leq x\ln(x)$
On ne change pas le sens des inégalités en composant avec exp qui est croissante, donc :

$$\forall x > 0, \quad x \leq \exp(x\ln(x)) = f(x)$$

Ainsi, $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C} \text{ est au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.}}$

4. **Bijection réciproque de la restriction de f à $\left[\exp(-1), +\infty\right[$**
Nous avons démontré que f est continue, strictement croissante sur $I = \left[e^{-1}, +\infty\right[$, de valeur $\exp(-1/e)$ en $\exp(-1)$, de limite $+\infty$ en $+\infty$.
Ainsi, d'après le <u>théorème de la bijection</u>, f définit donc une bijection de $\left[e^{-1}, +\infty\right[$ sur $J = \left[e^{-\frac{1}{e}}, +\infty\right[$. La bijection réciproque $\varphi : \left[e^{-\frac{1}{e}}, +\infty\right[\to \left[\exp(-1), +\infty\right[$ est une application continue, strictement croissante (de même variation que f).

x	$e^{-\frac{1}{e}}$		$+\infty$
$\varphi(x)$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Une relation vérifiée par $\ln(\varphi)$**
Soit $y \in J$. Nous savons que $f(\varphi(y)) = y$, c'est à dire : $\exp(\varphi(y)\ln(\varphi(y))) = y$.
En composant avec $\ln$: $\varphi(y)\ln(\varphi(y)) = \ln(y)$.
Sachant que $\varphi(y) \geq e^{-1} > 0$, donc non nul, nous pouvons diviser par $\varphi(y)$ et conclure :
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } y \in J : \ln(\varphi(y)) = \dfrac{\ln(y)}{\varphi(y)}}$

6. **Limite de $\dfrac{\varphi(y)}{\ln(y)}$ lorsque $y \to +\infty$**
Nous savons que $\varphi(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$, donc $\ln(\varphi(y)) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$.
Ainsi, $\boxed{\dfrac{\varphi(y)}{\ln(y)} = \dfrac{1}{\ln(\varphi(y))} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0}$

7. **Dérivabilité de φ**
φ est la bijection réciproque de f : φ est dérivable aux points y tel que $y = f(x)$ et $f'(x) \neq 0$, de dérivée :
$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$
φ est donc dérivable sur $\left]e^{-\frac{1}{e}}, +\infty\right[$ de dérivée :
$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\big(\ln(x)+1\big)f(x)}$$
où $\ln(x) = \ln(\varphi(y)) = \dfrac{\ln(y)}{\varphi(y)}$ car $f(x) = y$:
$$\varphi'(y) = \frac{1}{\left(\frac{\ln(y)}{\varphi(y)} + 1\right)y} = \frac{\varphi(y)}{y\big(\varphi(y) + \ln(y)\big)}$$
Ainsi, φ est dérivable sur $K = \left]\exp\left(-\frac{1}{e}\right), +\infty\right[$, de dérivée :
$$\boxed{\forall y \in K, \quad \varphi'(y) = \frac{\varphi(y)}{y\big(\varphi(y) + \ln(y)\big)}}$$

Exercice 2

8. Déterminons le domaine de validité :
$\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{3}\right)$ est défini lorsque $2x$ et $x\sqrt{3} \in \left[-1, 1\right]$, donc lorsque $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Dans ce cas, $\operatorname{Arcsin}(x)$ est également défini. Le domaine est $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.
Procédons par analyse-synthèse :

▶ *Analyse*

Si x est solution de l'équation, alors les sinus sont égaux. On a donc :

$$
\begin{aligned}
(\bigstar) \qquad x &= \sin\left(\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{3}\right)\right) \\
&= \sin\left(\operatorname{Arcsin}(2x)\right)\cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{3}\right)\right) - \cos\left(\operatorname{Arcsin}(2x)\right)\sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{3}\right)\right) \\
&= 2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} \text{ car } \cos(\operatorname{Arcsin}(t)) = \sqrt{1-t^2} \geq 0
\end{aligned}
$$

$x = 0$ est une solution évidente. Lorsque $x \neq 0$, on peut diviser par x :

$$(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2\sqrt{1-3x^2} - \sqrt{3\left(1-4x^2\right)}$$

En regroupant les termes, l'équation de vient :

$$2\sqrt{1-3x^2} = 1 + \sqrt{3\left(1-4x^2\right)}$$

En élevant au carré, l'équation de vient :

$$4\left(1-3x^2\right) = 1 + 2\sqrt{3\left(1-4x^2\right)} + 3\left(1-4x^2\right)$$

Ce qui donne après simplification : $2\sqrt{3\left(1-4x^2\right)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$

Les solutions possibles sont $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

▶ *Synthèse*

- Lorsque $x = 0$, $\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{3}\right) = 0 - 0 = 0 = \operatorname{Arcsin}(x)$.
- Lorsque $x = \frac{1}{2}$:

$$\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{3}\right) = \operatorname{Arcsin}(1) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Par parité, la relation est également vérifiée pour $x = -\frac{1}{2}$.

Conclusion, Les solutions de l'équation sont $\boxed{\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}.}$