DS 2

Samedi 2 octobre 2024 – durée : 4h – sortie possible à partir de 12h15 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Trigonométrie

1. Résoudre sur $[0, 2\pi]$ les équations ou inéquations suivantes :

$$(\mathcal{E}_1) \quad \cos(x) \geq \sqrt{2}, \quad (\mathcal{E}_2) \quad \cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\mathcal{E}_3) \quad \sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\mathcal{E}_4) \quad \cos(x)\sin(x) \leq 0, \quad (\mathcal{E}_5) \quad \cos(x)\sin^2(x) > 0$$

2. Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{S}_{(\mathcal{E}_6)} \quad 2\cos\left(5\text{Arctan}(x)\right) = 1$
3. Pour $\alpha = \dfrac{27\pi}{5}$, simplifier les expressions suivantes :

$$\text{Arcsin}(\sin(\alpha)), \qquad \text{Arccos}(\cos(\alpha)), \qquad \text{Arctan}(\tan(\alpha))$$

   Faire de même pour $\beta = \dfrac{99\pi}{10}$.
4. Pour $x = 2$, simplifier les expressions suivantes :

$$\text{Arctan}(\tan(x)), \quad \tan(\text{Arctan}(x)), \quad \tan(2\text{Arctan}(x)), \quad \cos(4\text{Arctan}(x)).$$

5. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$(\mathcal{E}_7) \quad \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{8}{9}\right) = \text{Arcsin}(x), \quad (\mathcal{E}_8) \quad \text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right) = \text{Arcsin}(x)$$

Exercice 2

1. Calculer de deux façons les racines carrées complexes de $D = 1 - i$.
2. En déduire les valeurs écrites à l'aide de radicaux de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + (4 - 2i)z - i = 0$.

Exercice 3

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$$

Partie A - Fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

1. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité : $1 - \operatorname{th}^2(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$.
2. Étudier la fonction th (dérivée, variations, limites, graphe).
3. a) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K à préciser.
   On note Argth la bijection réciproque.

   b) Justifier que Argth est dérivable sur K et déterminer sa dérivée.

Partie B - Étude de f

4. a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

   b) Établir, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$: $f(x+\pi) = -f(x)$.
   En déduire que f est périodique et donner une période de f.

   c) On note I l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Expliquer comment obtenir le graphe de f sur $\mathcal{D}_f$ à partir de son graphe sur I.
5. a) Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. On pose $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. Établir les relations :

$$\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

   b) En déduire, pour tout $x \in I$: $f(x) = \ln\left(\tan(x) + \dfrac{1}{\cos(x)}\right)$.
6. a) Justifier que f est dérivable sur I et que : $\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

   b) Dresser le tableau des variations de f sur I, en précisant les limites au bornes.

Partie C - Étude de la fonction réciproque

7. Justifier que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
   On note g la bijection réciproque.
8. Soit $x \in I$. Montrer que $\operatorname{ch}(f(x)) = \dfrac{1}{\cos(x)}$. Exprimer de même $\operatorname{sh}(f(x))$ et $\operatorname{th}(f(x))$.
9. Montrer, pour tout $y \in J$: $g(y) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(y)) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(y))$.
10. En déduire que g est dérivable sur J et donner une expression simple de sa dérivée.

Exercice 4

Les deux premières parties sont indépendantes.

Partie A

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} \text{ si } t > 0 \text{ et } g(0) = 1$$

1. a) Etablir que $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = g(0)$. On dit que g est continue en 0.

   b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a) Pour tout $t > 0$, calculer $g'(t)$.

   b) En donnant le tableau des variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\varphi : t \mapsto e^t - 1 - t$, prouver que pour tout t réel, $1 + t \leq e^t$.

   c) En déduire le signe de g' et le sens des variations de g.

3. On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0.

Rappel

> ➜ Une fonction f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.
> Le cas échéant, la limite est appelée nombre dérivée de f en x_0, notée $f'(x_0)$.

   A cet effet, on introduit la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(t) = 1 - t + \dfrac{t^2}{2} - e^{-t}$.

   a) Calculer h' et h'', ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.

   b) Etablir que $0 \leq h''(t) \leq t$.

   c) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq h(t) \leq \dfrac{t^3}{6}$ $(\bigstar)$.

   d) Déduire de la relation $(\bigstar)$ un encadrement de $\dfrac{1-e^{-t}-t}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Prouver finalement que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 1$$

4. a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) > 0$.

   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   c) Prouver que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-2x}(2x + 1 - e^x(x+1))$.

   d) Utilisant la question A2b), montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) \leq 0$.

5. Vérifier que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2g(2x) - g(x)$, où g est la fonction définie dans la première partie.
   En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

6. Construire la courbe représentative de f, le plan étant rapporté à un repère orthonormé d'unité 4cm.

Partie C

On étudie maintenant la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$.
On ne cherchera pas à calculer cette intégrale !
On rappelle que F, ainsi définie, est la primitive de f s'annulant en 0.

7. a) Étudier le sens de variation de F.

   b) Établir que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.
   En déduire que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq F(t) \leq 1$.

8. Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $G(t)=\displaystyle\int_0^t g(x)\mathrm{d}x$.

   a) En utilisant la relation de la question B.2), prouver que pour $t \geq 0$, $F(t)=G(2t)-G(t)$.

   b) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $F(t)=\displaystyle\int_t^{2t} g(x)\mathrm{d}x$.

   c) Établir que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{x}-g(x) \leq e^{-x}$.
   En déduire que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \ln(2)-F(t) \leq e^{-t}$.

   d) Prouver finalement que $F(t)$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

FIN DE L'ÉNONCÉ