Proposition de corrigé du devoir surveillé 2

Exercice 1

1. Pour $x \in [0, 2\pi]$, et par lecture sur le cercle trigonométrique :

- $\boxed{\mathcal{S}_{(\mathcal{E}_1)} = \emptyset}$ car $\sqrt{2} \notin [-1,1]$ et $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$.
- $\boxed{\mathcal{S}_{(\mathcal{E}_2)} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$
- $$\begin{aligned} \sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 3x \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 3x \equiv \frac{5\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{4\pi}{9}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{9}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

On identifie toutes les solutions sur $[0, 2\pi]$: $\boxed{\mathcal{S}_{(\mathcal{E}_3)} = \left\{\frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}\right\}}$

<u>Autre approche</u> : $x \in [0, 2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad 3x \in [0, 6\pi]$

$$\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x \in \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}\right\}$$

On retrouve la même réponse.

- Utilisons un tableau de signe :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$\sin(x)$	0		$+$		0		$-$		0
$\cos(x)\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{(\mathcal{E}_4)} = \{0\} \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]}$

- $\boxed{\mathcal{S}_{(\mathcal{E}_5)} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[}$

2. $$\begin{aligned} \cos\left(5\text{Arctan}(x)\right) = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 5\text{Arctan}(x) \in \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Arctan}(x) \in \pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Or le domaine d'arrivée de Arctan est $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$(\mathcal{E}_6) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Arctan}(x) \in \left\{\pm\frac{\pi}{15}, \pm\frac{5\pi}{15}, \pm\frac{7\pi}{15}\right\}$$

Ainsi, il vient : $\boxed{\mathcal{S}_{(\mathcal{E}_6)} = \left\{\pm\tan\left(\frac{\pi}{15}\right), \pm\tan\left(\frac{5\pi}{15}\right), \pm\tan\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right\}}$

3. • Le travail consiste à déterminer $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\alpha) = \sin(\theta)$

$$\alpha = \frac{27\pi}{5} = 6\pi - \frac{3\pi}{5} \text{ et } \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) \text{ donc } \boxed{\text{Arcsin}(\sin(\alpha)) = -\frac{2\pi}{5}}$$

- Déterminons $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$

$$\alpha = \frac{27\pi}{5} = 6\pi - \frac{3\pi}{5} \text{ et } \cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \text{ donc } \boxed{\text{Arccos}(\cos(\alpha)) = \frac{3\pi}{5}}$$

- Déterminons $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\alpha) = \tan(\theta)$

$$\alpha = \frac{27\pi}{5} = 6\pi - \frac{3\pi}{5} \text{ et } \tan\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ donc } \boxed{\operatorname{Arctan}(\tan(\alpha)) = \frac{2\pi}{5}}$$

- On procède de même pour $\beta = \dfrac{99\pi}{10} = 10\pi - \dfrac{\pi}{10}$. Il vient :

$$\boxed{\operatorname{Arcsin}(\sin(\beta)) = \operatorname{Arctan}(\tan(\beta)) = -\frac{\pi}{10} \qquad \operatorname{Arccos}(\cos(\beta)) = \frac{\pi}{10}}$$

4. - Arctan est la bijection réciproque de la restriction de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan}(\tan(x)) = \operatorname{Arctan}(\tan(y)) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \tan(x) = \tan(y) \text{ et } y \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv y\ [\pi] \text{ et } y \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Arctan}(\tan(2)) = 2 - \pi}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan \circ \operatorname{Arctan}(x) = x$; ainsi, $\boxed{\tan \circ \operatorname{Arctan}(2) = 2.}$
- On note que $\mathcal{D}_{\tan \circ (2\operatorname{Arctan})} = \{x \in \mathbb{R};\ 2\operatorname{Arctan}(x) \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\} = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.

La formule de duplication donne : $\tan\big(2\operatorname{Arctan}(x)\big) = \dfrac{2\tan\big(\operatorname{Arctan}(x)\big)}{1 - \tan^2\big(\operatorname{Arctan}(x)\big)} = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Ainsi, $\boxed{\tan\big(2\operatorname{Arctan}(2)\big) = \dfrac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\dfrac{4}{3}.}$

- On note que $\mathcal{D}_{\cos \circ (4\operatorname{Arctan})} = \mathbb{R}$. Rappelons les formules suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \text{ et } \cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

Il vient :
$$\begin{aligned} \cos(4\operatorname{Arctan}(x)) &= 2\left(\frac{2}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan}(x))} - 1\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{2}{1+x^2} - 1\right)^2 - 1 \\ &= \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\cos(4\operatorname{Arctan}(2)) = \dfrac{16 - 24 + 1}{5^2} = -\dfrac{7}{25}.}$

5. - Condition nécessaire pour qu'il y ait une solution : $\underbrace{\operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)}_{\alpha} + \underbrace{\operatorname{Arccos}\left(\frac{8}{9}\right)}_{\beta} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

En représentant ces données sur le cercle trigonométrique, nous avons :

$$0 < \frac{4}{5} < \frac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad 0 < \beta < \alpha < \beta + \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Appliquons sin aux deux membres de l'équation et utilisons le formule d'addition

$$\forall c, d \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin(c+d) = \sin(c)\cos(d) + \cos(c)\sin(d)$$

Il vient :
$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{5}\frac{8}{9} + \cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)\right)\sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{8}{9}\right)\right) \\ &= \frac{4}{5}\frac{8}{9} + \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}\sqrt{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2} \end{aligned}$$

avec pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Ainsi, $\boxed{x = \dfrac{32 + 3\sqrt{17}}{45}}$

- Cette équation n'a pas de solution :

$$2 < 3 < 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right) > \text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) > \frac{\pi}{3}$$

Ainsi, $\text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right) > \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1. On a $D = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

- L'utilisation de la forme trigonométrique donne que $\boxed{\text{les racines de } D \text{ sont } \{\pm\sqrt{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}}\}}$.
- Utilisation de la forme algébrique :

$$(a+ib)^2 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} a^2 - b^2 & = & 1 \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{2} \\ ab & < & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} a^2 & = & \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ b^2 & = & \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ ab & < & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Les racines de } D \text{ sont } \left\{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}}.$$

2. Par identification, on obtient :

$$\sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Faisant de même pour $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ on trouve :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

3. Calcul du discriminant de $z^2 + (4-2i)z - i = 0$:

$$\Delta = (4-2i)^2 + 4i = 16 - 16i - 4 + 4i = 12D \text{ avec } \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$$

Or $12D = \left(2\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} - i2\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{6(\sqrt{2}+1)} - i\sqrt{6(\sqrt{2}-1)}\right)^2$

Ainsi, $\boxed{\text{les racines sont } \left\{\dfrac{-4+2i+\sqrt{6(\sqrt{2}+1)} - i\sqrt{6(\sqrt{2}-1)}}{2}, \dfrac{-4+2i-\sqrt{6(\sqrt{2}+1)} + i\sqrt{6(\sqrt{2}-1)}}{2}\right\}}$.

Exercice 3

Partie A - Fonction tangente hyperbolique

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - \text{th}^2(x) = 1 - \dfrac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ 1 - \text{th}^2(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}.}$

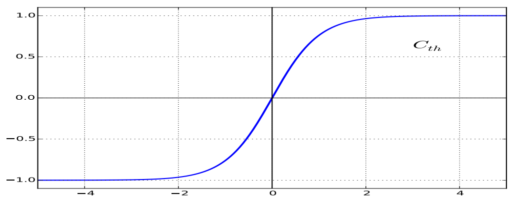
2. On a ch > 0 donc th est définie sur $\mathbb{R}$; de plus, sh et ch sont dérivables alors, par quotient, th est dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) = \dfrac{\text{sh}'(x)\text{ch}(x) - \text{ch}'(x)\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0.$

Donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{th}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

De plus, th est impaire, donc $\text{th}(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -1$.



3. a) La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{th réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } f(\mathbb{R}) =]-1, 1[.}$

b) Comme th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\text{th}' > 0$, alors Argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\text{pour } y \in]-1, 1[, \qquad \text{Argth}'(y) = \frac{1}{\text{th}'(\text{Argth}(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{Argth}(y))} = \frac{1}{1 - y^2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Argth est dérivable sur }]-1, 1[\text{ et } \text{Argth}' : t \mapsto \dfrac{1}{1 - t^2}.}$

Partie B - Étude de f

4. a) $\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \in \mathcal{D}_{\tan} \text{ et } \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0\right\}$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \mathcal{D}_{\tan} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}}$

b) Soit $x \in \mathcal{D}_f$, alors $x+\pi \in \mathcal{D}_f$ et

$$f(x+\pi) = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x+\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|\right)$$

$$= \ln\left(\left|\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|\right) = -\ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x+\pi) = -f(x).}$
Soit $s \in \mathcal{D}_f$, alors $x+2\pi \in \mathcal{D}_f$, $f(x+2\pi) = -f(x+\pi) = (-1)^2 f(x) = f(x)$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$
c) On déduit la courbe sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ de celle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en faisant une symétrie par rapport à l'axe (Ox) et une translation de vecteur $\pi\overrightarrow{i}$.
Enfin, la 2π-périodicité de f permet de construire la courbe de f sur $\mathcal{D}_f$ par translations de vecteurs $2k\pi\overrightarrow{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
5. a) Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$ et donc $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$; alors

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sin(\theta)$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \cos(\theta)$$

Ainsi, $\boxed{\forall \theta \in]-\pi;\pi[, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.}$
b) Soit $x \in I$ et $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \in]-1,1[$, alors

$$\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} + \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t+1+t^2}{1-t^2} = \frac{(1+t)^2}{(1-t)(1+t)} = \frac{1+t}{1-t}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{t+1}{1-t}$$

De plus, comme $x \in I$, alors $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$.
Ainsi, $\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \ln\left(\tan(x)+\frac{1}{\cos(x)}\right).}$
6. a) La fonction $x \mapsto \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}$ strictement positive (d'après ci-avant) et dérivable sur I. Or ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f est dérivable sur I. Soit $x \in I$

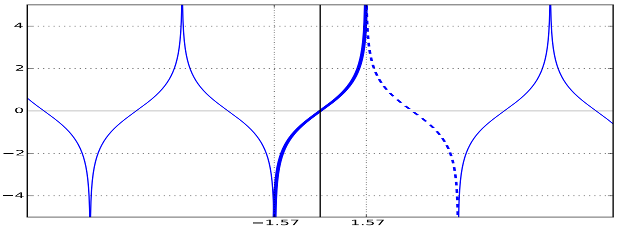
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}+\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{\tan(x)+\frac{1}{\cos(x)}} = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)(1+\sin(x))} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}.}$

b) Sut I, $\cos > 0$ donc f est strictement croissante. Recherchons les limites aux bornes de I :

- $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} = \frac{\pi}{2}^-$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} \tan = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$, alors par composition, $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} f = +\infty$.
- $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \underset{x\to-\frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} = 0^+$, $\lim\limits_{0^+} \tan = 0^+$ et $\lim\limits_{0^+} \ln = -\infty$, alors par composition, $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^+} f = 0$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$-\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Partie C - Étude de la fonction réciproque

7. La fonction f est continue et strictement croissante sur I donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $f(I) = \mathbb{R}$.

8. Soit $x \in I$,

- $$\begin{aligned} \mathrm{ch}(f(x)) &= \frac{1}{2}\left(e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} + \frac{1}{\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)+1}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{(\sin(x)+1)^2 + \cos^2(x)}{\cos(x)(\sin(x)+1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x) + 1 + 2\sin(x) + \cos^2(x)}{\cos(x)(\sin(x)+1)} = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)(\sin(x)+1)} = \frac{1}{\cos(x)} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathrm{sh}(f(x)) &= \frac{1}{2}\left(e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x) + 1 + 2\sin(x) - \cos^2(x)}{\cos(x)(\sin(x)+1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x) + 1 + 2\sin(x) - 1 + \sin^2(x)}{\cos(x)(\sin(x)+1)} = \frac{1}{2}\frac{2\sin(x)(\sin(x)+1)}{\cos(x)(\sin(x)+1)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) \end{aligned}$$
- $\mathrm{th}(f(x)) = \dfrac{\mathrm{sh}(f(x))}{\mathrm{ch}(f(x))} = \dfrac{\tan(x)}{\frac{1}{\cos(x)}} = \sin(x)$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in I,\ \mathrm{ch}(f(x)) = \dfrac{1}{\cos(x)} \quad \mathrm{sh}(f(x)) = \tan(x) \text{ et } \mathrm{th}(f(x)) = \sin(x).}$

9. Soit $y \in J = \mathbb{R}$, on pose $x = g(y) \in I$

$$\mathrm{th}(y) = \mathrm{th}(f(x)) = \sin(x) = \sin(g(y)) \text{ donc } \mathrm{Arcsin}(\mathrm{th}(y)) = g(y)$$

$$\mathrm{sh}(y) = \mathrm{sh}(f(x)) = \tan(x) = \tan(g(y)) \text{ donc } \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(y)) = g(y)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } y \in J : g(y) = \mathrm{Arcsin}(\mathrm{th}(y)) = \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(y)).}$

10. f est dérivable et $f' > 0$ donc g est dérivable sur J.
Autre approche : la fonction sh et Arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc, par composition g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour } y \in J, \text{ alors } g'(y) = \mathrm{sh}'(y)\mathrm{Arctan}'(\mathrm{sh}(y)) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}.}$