DM 3

à rendre le mercredi 9 octobre 2024

Homographie

On note $\overline{\mathbb{C}}$ l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Si u, v, w et k sont quatre complexes tels que $uk - vw \neq 0$, on définit l'homographie $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{uz+v}{wz+k} & \text{si } wz+k \neq 0 \\ \infty & \text{si } wz+k = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(\infty) = \begin{cases} \dfrac{u}{w} & \text{si } w \neq 0 \\ \infty & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

Par abus de langage, on notera une telle homographie :

$$\begin{aligned} \varphi \ : \overline{\mathbb{C}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{uz+v}{wz+k} \end{aligned}$$

Partie A – Décomposition des homographies

1. Soient a, b, c trois nombres complexes. Démontrer qu'il existe une unique homographie φ telle que :

$$\varphi(a) = 0 \qquad \varphi(b) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(c) = \infty$$

2. Soit $d \in \mathbb{C}$ et φ l'unique homographie telle que :

$$\varphi(a) = 0 \qquad \varphi(b) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(c) = \infty$$

Calculer $\varphi(d)$.
On appelle *birapport* des points a, b, c et d et on note $\big[a, b, c, d\big]$ cette valeur. Le but de cet exercice est de démontrer que les points d'affixe a, b, c et d sont cocycliques[1] ou alignés si et seulement si $\big[a, b, c, d\big]$ est réel.
3. Soit φ une homographie :

$$\varphi(z) = \frac{uz+v}{wz+k}$$

Démontrer que l'on a l'alternative suivante :

a) ou bien φ est une similitude plane directe :

$$z \longmapsto \alpha z + \beta$$

b) ou bien φ est composée d'une translation de vecteur d'affixe α, de l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ et d'une similitude plane directe $z \mapsto \beta z + \gamma$ $(\beta \neq 0)$:

$$z \longmapsto \alpha + \frac{1}{\beta z + \gamma}$$

Dans ce cas, exprimer α, β et γ en fonction de u, v, w et k.

1. Quatre points sont cocycliques lorsqu'ils appartiennent à un même cercle

Partie B – Étude de l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$

Soit φ l'inversion $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$. On considère

4. Démontrer que le point d'affixe $z = \rho\exp(i\theta)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$ avec $c \neq 0$ (c'est-à-dire ne passant pas par O) si et seulement si :

$$\rho = \frac{c}{a\cos(\theta) + b\sin(\theta)}$$

On dit que $\mathcal{D}$ a pour équation polaire : $\rho = \dfrac{c}{a\cos(\theta) + b\sin(\theta)}$

5. Démontrer que le point d'affixe $z = \rho\exp(i\theta)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $a + ib$ passant par le point O d'affixe 0 si et seulement si :

$$\rho = 2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)$$

On dit que $\mathcal{C}$ a pour équation polaire : $\rho = 2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)$

6. En déduire que l'image par φ de la droite d'équation $ax + by = c$ (avec $c \neq 0$) est un cercle.
Indication : On pourra utiliser l'équation polaire de $\mathcal{D}$.

7. En déduire que l'image par φ du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $a+ib$ passant par le point O d'affixe 0 est une droite.
Indication : On pourra utiliser l'équation polaire de $\mathcal{C}$.

8. Quelle est l'image par φ d'une droite passant par O ?

En déduire que l'image par φ d'une droite ou l'image d'un cercle passant par O est une droite ou un cercle passant par O.
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω, ne passant pas par O. On notera a et b les affixes des points A et B, points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $(O\Omega)$

9. Démontrer que M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

10. En déduire que le point M d'affixe z appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b}$ est imaginaire pur.

11. En déduire que l'image du cercle de diamètre $[AB]$ par l'inversion $\varphi : z \mapsto \frac{1}{z}$ est le cercle de diamètre $[\varphi(A), \varphi(B)]$
Indication : On pourra calculer $\dfrac{\varphi(z) - \varphi(a)}{\varphi(z) - \varphi(b)}$ et remarquer que $\dfrac{a}{b}$ est réel car O, A et B sont alignés.

12. Quelle est l'image du cercle de centre $\Omega(6, 8)$, de rayon 5, par l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$?

13. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω. Proposer en détaillant les étapes une construction à la règle et au compas du cercle image de $\mathcal{C}$ par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$.

Partie C – Image d'un cercle ou d'une droite

14. En décomposant l'homographie φ :

$$z \longmapsto \frac{1+z}{1-z}$$

comme dans la question **??**, identifier l'image par φ de la droite d'équation $2x + 4y = 1$.

15. En utilisant l'alternative de la question **??**, démontrer que l'image d'une droite ou d'un cercle par une homographie est une droite ou un cercle, puis en déduire que quatre points d'affixe a, b, c et d sont cocycliques ou alignés si et seulement leur birapport est un nombre réel.