Corrigé du DM 3

Homographie

Partie A – Décomposition des homographies

1. **Action sur les triplets de points**
Soient a, b et c trois nombres complexes distincts et $\varphi : z \longmapsto \frac{uz+v}{wz+y}$ une homographie.
$\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ et $\varphi(c) = \infty$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(a) = 0 \\ \varphi(b) = 1 \\ \varphi(c) = \infty \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ua + v = 0 \\ ub + v = wb + y \\ wc + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v = -ua \\ y = -wc \\ u(b-a) = w(b-c) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v = -ua \\ w = u\left(\dfrac{b-a}{b-c}\right) \\ y = -uc\left(\dfrac{b-a}{b-c}\right) \end{array}\right.$$

L'homographie φ est donc :

$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}}, \quad \varphi(z) = \frac{uz - ua}{u\left(\frac{b-a}{b-c}\right)(z-c)} = \left(\frac{b-c}{b-a}\right)\left(\frac{z-a}{z-c}\right)$$

Ainsi, si a, b et c sont trois nombres complexes distincts, il existe une unique homographie φ telle que :

$$\varphi(a) = 0 \qquad \varphi(b) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(c) = \infty$$

φ est l'homographie définie par :

$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}}, \quad \varphi(z) = \left(\frac{b-c}{b-a}\right)\left(\frac{z-a}{z-c}\right)$$

2. **Birapport de quatre points**

D'après la question précédente : $\boxed{\varphi(d) = \left(\dfrac{b-c}{b-a}\right)\left(\dfrac{d-a}{d-c}\right) = \underbrace{[a,b,c,d]}_{\text{notation}}}$

3. **Décomposition des homographies**
Soit φ une homographie : $\varphi(z) = \dfrac{uz+v}{wz+k}$

a) Si $w = 0$, ($k \neq 0$ car $uk - vw \neq 0$) alors φ est une similitude plane directe :

$$\varphi(z) = \left(\frac{u}{k}\right)z + \left(\frac{v}{k}\right) = \alpha z + \beta \text{ avec } \alpha = \frac{u}{k} \text{ et } \beta = \frac{v}{k}$$

b) Si $w \neq 0$, on peut factoriser :

$$uz + v = \frac{u}{w}(wz+k) - \frac{uk - vw}{w}$$

Donc $\varphi(z) = \dfrac{u}{w} - \dfrac{uk-vw}{w(wz+k)} = \alpha + \dfrac{1}{\beta z + \gamma}$ avec $\alpha = \dfrac{u}{w}$, $\beta = -\dfrac{w^2}{uk-vw}$ et $\gamma = -\dfrac{wk}{uk-vw}$

Partie B – Étude de l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$

Soit φ l'inversion $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$.

4. **Équation de droite**

Soit $c \neq 0$. Considérons le point $M(x, y)$ d'affixe $z = \rho\exp(i\theta)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax+by = c$:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad a\underbrace{\rho\cos(\theta)}_{x} + b\underbrace{\rho\sin(\theta)}_{y} = c \quad \Leftrightarrow \quad \big(a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\big)\rho = c \\ &\Leftrightarrow \quad \rho = \frac{c}{a\cos(\theta) + b\sin(\theta)} \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $c \neq 0$, le point d'affixe $z = \rho\exp(i\theta)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$ si et seulement si :

$$\rho = \frac{c}{a\cos(\theta) + b\sin(\theta)}$$

Remarque :

a) le point d'affixe $z = \rho\exp(i\theta)$ est l'unique point d'intersection de la droite d'angle polaire θ avec la droite $\mathcal{D}$. ρ est positif lorsque $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{u}(\theta) = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$ sont colinéaires, de même sens, négatif lorsqu'ils sont de sens opposés. Dans tous les cas :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}(\theta)$$

b) Lorsque $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = 0$, $\rho = \frac{c}{0}$ n'est pas défini : cela correspond au cas où $\overrightarrow{u}(\theta)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Dans ce cas, la droite d'angle polaire θ et la droite $\mathcal{D}$ sont parallèles, et n'ont pas de point d'intersection.

5. **Équation de cercle**

Soient $(a, b) \neq (0, 0)$. Le point $M(x, y)$ d'affixe $z = \rho\exp(i\theta)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $a + ib$ passant par le point O d'affixe 0 si et seulement si :

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{\Omega O}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad |-a-ib|^2 = |\rho\cos(\theta) - a + i(\rho\sin(\theta) - b)|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = \quad a^2 - 2a\rho\cos(\theta) + \rho^2\cos^2(\theta) + b^2 - 2b\rho\sin(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = -\big(2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)\big)\rho + \rho^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = \big[\rho - \big(2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)\big)\big]\,\rho \end{aligned}$$

donc si et seulement si $\rho = 0$ (c'est à dire $M = O$) ou $\rho = 2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)$.

Pour obtenir la caractérisation souhaitée il reste à établir que le cas $\rho = 0$ est compris dans le cas $\rho = 2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)$, c'est-à-dire qu'il existe θ tel que l'affixe du point O peut aussi s'écrire $\rho\exp(i\theta)$ avec $\rho = 2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)$, c'est-à-dire qu'il existe θ tel que $2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta) = 0$.

On pose $z = a - ib$ de forme trigonométrique $z = \lambda e^{i\alpha}$. Alors,

$$2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta) = \mathrm{Re}\left(2ze^{i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(2\lambda e^{i(\theta+\alpha)}\right) = 0 \quad \Leftarrow \quad \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Donc pour $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, on montre que le point O est aussi obtenu.

Ainsi, le point d'affixe $z = \rho\exp(i\theta)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $a + ib$ passant par le point O d'affixe 0 si et seulement si :

$$\rho = 2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)$$

6. **Image d'une droite, ne passant pas par O, par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$**
L'équation polaire de la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by = c$ (avec $c = \neq 0$) est :

$$\rho = \frac{c}{a\cos(\theta) + b\sin(\theta)}$$

L'image du point d'affixe $\rho\exp(i\theta)$ de $\mathcal{D}$ par φ est le point d'affixe $\rho'\exp(i\theta') = \dfrac{1}{\rho}\exp(-i\theta)$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{\rho} = \frac{a\cos(\theta) + b\sin(\theta)}{c} \\ &= \frac{a}{c}\cos(\theta') - \frac{b}{c}\sin(\theta') \qquad \text{car } \theta' = -\theta \end{aligned}$$

D'après la question précédente, il vient que l'image de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$ est donc le cercle de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{a - ib}{2c}$ passant par O.
7. **Image d'un cercle passant par O par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$**
L'équation polaire du cercle de centre Ω, d'affixe $a + ib$, passant par O est :

$$\rho = 2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)$$

L'image du point d'affixe $\rho\exp(i\theta)$ par φ est le point d'affixe $\rho'\exp(i\theta') = \frac{1}{\rho}\exp(-i\theta)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)} \\ &= \frac{1}{2a\cos(\theta') - 2b\sin(\theta')} \qquad \text{car } \theta' = -\theta \end{aligned}$$

Ainsi, l'image du cercle de centre Ω d'affixe $\omega = a+ib$ passant par O est donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$2ax - 2by = 1$$

8. **Image d'une droite passant par O par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$**
Une droite passant par O, d'angle polaire α est l'ensemble des points $\rho\exp(i\theta)$ où $\theta = \alpha\ [\pi]$.
L'image du point d'affixe $\rho\exp(i\theta)$ par φ est le point d'affixe $\rho'\exp(i\theta') = \frac{1}{\rho}\exp(-i\theta)$. Il vient donc que θ' vérifie :

$$\theta' = -\alpha - \pi\ [\pi]$$

Ainsi, l'image de la droite passant par O, d'angle polaire α est la droite passant par O, d'angle polaire $-\alpha$.
L'image par φ d'une droite ou l'image d'un cercle passant par O est une droite ou un cercle passant par O.
9. **Cercle de diamètre $[AB]$**
Approche 1 : Utiliser le théorème de l'angle inscrit dans un demi cercle, c'est angle vaut 90 degrés, il définit un angle droit.
Approche 2 : Utilisons le notion de produit scalaire en simplifiant l'expression $\left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle$.
Soit Ω le milieu de $[AB]$. Il vient :

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{\Omega A} \right\rangle \qquad \text{car } \overrightarrow{B\Omega} = \overrightarrow{\Omega A} \\ &\qquad \text{par propriété de linéarité} \\ &= \underbrace{\left\langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M} \right\rangle}_{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2} + \left\langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M} \right\rangle - \underbrace{\left\langle \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A} \right\rangle}_{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\|^2} \\ &= \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\|^2 \qquad \text{car } \left\langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M} \right\rangle \end{aligned}$$

Le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si M appartient au cercle de centre Ω, de rayon ΩA si et seulement si $\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\|^2$ si et seulement si $\left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.
Nous en déduisons que le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

10. **Caractérisation complexe d'une cercle de diamètre** $[AB]$
La caractérisation de deux vecteurs orthogonaux, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ est que $\dfrac{z-a}{z-b}$ est un imaginaire pur.
En effet, $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM}) = \arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ donc

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$$

Ainsi, d'après la question précédente, M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b}$ est un imaginaire pur.

11. **Image du cercle de diamètre** $[AB]$ **par l'inversion**
Soit M un point d'affixe z, sur le cercle de diamètre $[AB]$, et $\varphi(M)$ le point d'affixe $\varphi(z) = \dfrac{1}{z}$.

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{\varphi(z)-\varphi(b)} = \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{b}} = \frac{bz}{az}\frac{a-z}{b-z} = \frac{b}{a}\frac{z-a}{z-b}$$

Comme O, A et B sont alignés, donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaire, c'est-à-dire que $\arg\left(\dfrac{b-0}{a-0}\right) = 0\,[\pi]$, c'est-à-dire que $\dfrac{b}{a}$ est réel.
Il vient que :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_{\emptyset[AB]} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a}\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{\varphi(z)-\varphi(b)} \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(M) \in \mathcal{C}_{\emptyset[\varphi(A)\varphi(B)]} \end{aligned}$$

Ainsi, l'image par l'inversion $\varphi : z \longmapsto \frac{1}{z}$ d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω qui ne passe pas par O est le cercle de diamètre $[\varphi(A), \varphi(B)]$, où A et B sont les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $(O\Omega)$.

12. **Un exemple**
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(6, 8)$, d'affixe $\omega = 6 + 8i$, de rayon 5. Le diamètre du cercle sur la droite $(O\Omega)$ est donné par les points A et B tel que

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\Omega} + \frac{5}{O\Omega}\overrightarrow{O\Omega} \text{ et } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\Omega} - \frac{5}{O\Omega}\overrightarrow{O\Omega}$$

Leurs affixes respectives sont :

$$a = \omega + 5\frac{\omega}{|\omega|} = 6 + 8i + 5\frac{6+8i}{\sqrt{6^2+8^2}} = 6 + 8i + \frac{5}{10}(6+8i) = 9 + 12i$$

$$\text{et } b = \omega - 5\frac{\omega}{|\omega|} = 3 + 4i$$

Les affixes de $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ sont :

$$\varphi(a) = \frac{1}{9+12i} = \frac{9-12i}{81+144} = \frac{3-4i}{75} \text{ et } \varphi(b) = \frac{3-4i}{25}$$

Ainsi, l'image du cercle de centre $\Omega(6,8)$, de rayon 5, par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est le cercle de diamètre $[\varphi(A), \varphi(B)]$, où :

$$\varphi(a) = \frac{3-4i}{75} \quad \text{et} \quad \varphi(b) = \frac{3-4i}{25}$$

13. **Construction à la règle et au compas**

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω ne passant pas par O. La droite $(O\Omega)$ coupe le cercle en deux points A et B : il suffit de construire les images A' et B' de A et B pour en déduire l'image $\mathcal{C}'$ du cercle par l'inversion : $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre Ω', milieu de $[A'B']$, passant par A' et B'.

Détaillons la construction de l'image A' d'un point A d'affixe $z = \rho\exp(i\theta)$ par l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$:

a) A' est sur la demi–droite d'angle polaire $-\theta$, symétrique de la demi–droite $[OA)$ par la réflexion d'axe (Ox). Le cercle de centre A passant par O coupe (Ox) au point O et en un second point A_1. Les cercles de centres respectifs A_1 et O passant par A se coupent au point A et en un second point A_2 : $[OA_2)$ est la demi–droite $\mathcal{D}$ d'angle polaire $-\theta$.

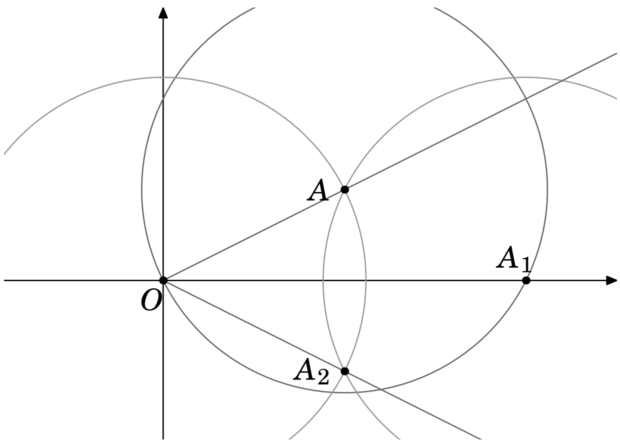


Image de $[OA)$ par la réflexion d'axe (Ox)

b) Le cercle de centre O et de rayon 1 coupe la demi-droite $\mathcal{D}$ en un point A_3 et la demi droite $[OA)$ en A_4. Complétons le parallélogramme $AA_3A_4A_5$: le quatrième sommet A_5 appartient au cercle de centre A, de rayon A_3A_4, et au cercle de centre A_4, de rayon AA_3.

La droite (A_4A_5) coupe la demi droite $\mathcal{D}$ en un point A' : d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OA'}{OA_3} = \frac{OA_4}{OA}$$

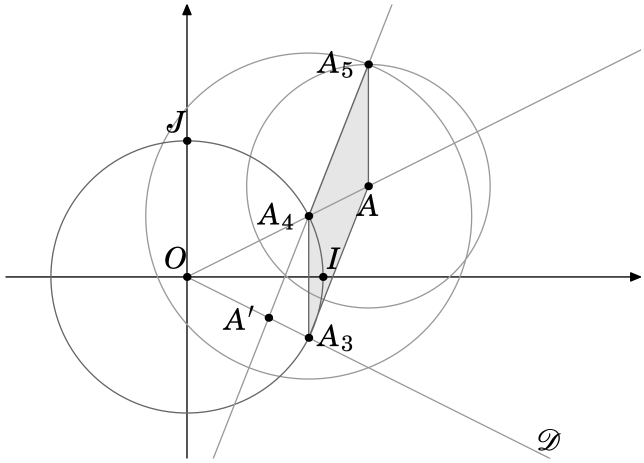
Comme $OA_3 = OA_4 = 1$, nous en déduisons que

$$OA' = \frac{1}{OA} = \frac{1}{\rho}$$

A' appartient à la demi-droite $\mathcal{D}$ d'angle polaire $-\theta$, donc A' est le point d'affixe :

$$z' = OA'\exp(-i\theta) = \frac{1}{\rho}\exp(-i\theta) = \frac{1}{z}$$

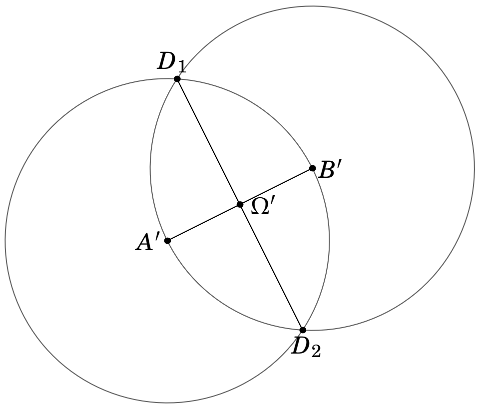
A' est donc l'image de A par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$.



Construction de A', image de A par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$

On suppose avoir construit B' de façon analogue.

Détaillons la construction du milieu du segment $[A'B']$: le cercle de centre A' passant par B' et le cercle de centre B' passant par A' se coupent en deux points D_1 et D_2. La droite (D_1D_2) est la médiatrice du segment $[A'B']$: elle coupe le segment en son milieu Ω'.



Construction du milieu du segment $[A'B']$

Si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre Ω, on construit son image par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$ en plusieurs étapes :
a) La droite $(O\Omega)$ coupe le cercle en deux points A et B,
b) on construit les images A' et B' des points A et B par l'inversion,
c) puis le milieu Ω' du segment $[A'B']$,
d) L'image de $\mathcal{C}$ par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre Ω passant par A' et B'.

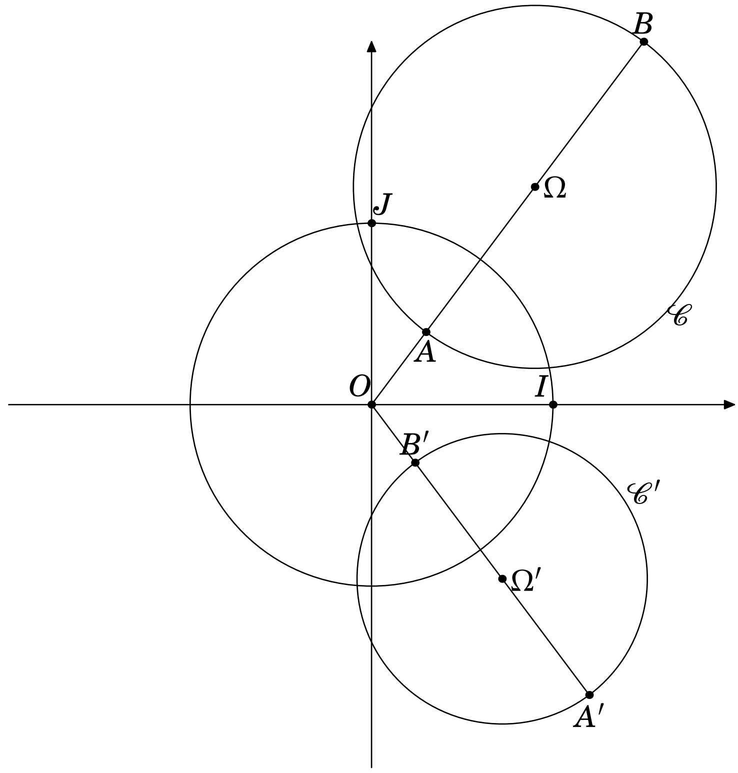


Image d'un cercle de centre Ω par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$

Partie C – Image d'un cercle ou d'une droite

14. **Un autre exemple**

Soit φ l'homographie $z \longmapsto \dfrac{1+z}{1-z}$. Nous pouvons décomposer :

$$\varphi(z) = \frac{2-(1-z)}{1-z} = \frac{2}{1-z} - 1 = \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1(z)$$

où ψ_3 est la similitude $z \longmapsto 1-z$, ψ_2 est l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$ et ψ_1 est la similitude $z \longmapsto 2z-1$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x+4y=1$, $\mathcal{D}_1$ son image par ψ_1, $\mathcal{C}_2$ l'image de $\mathcal{D}_1$ par ψ_2 et $\mathcal{C}_3$ l'image de $\mathcal{C}_2$ par ψ_3.

a) Si $M(x,y) \in \mathcal{D}$, alors $x_1 + iy_1 = 1-(x+iy)$, donc $x_1 = 1-x$ et $y_1 = -y$, c'est à dire :

$$x = 1 - x_1 \quad \text{et} \quad y = -y_1$$

$M_1(x_1, y_1)$ appartient à $\mathcal{D}_1$ si et seulement si, successivement :

$$2(1-x_1) + 4(-y_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 2x_1 - 4y_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 4y_1 = 1$$

Ainsi, la droite $\mathcal{D}_1$ est donc la droite d'équation :

$$M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{D}_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 4y_1 = 1$$

En particulier $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}$ sont confondues.

b) L'équation polaire de $\mathcal{D}_1$: $2x+4y=1$ est $\rho = \dfrac{1}{2\cos(\theta) + 4\sin(\theta)}$

L'équation polaire de $\mathcal{C}_2$, image de $\mathcal{D}_1$ par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est donc :

$$\rho = 2\cos(\theta) - 4\sin(\theta)$$

Ainsi, $\mathcal{C}_2$ est donc le cercle de centre Ω, d'affixe $1-2i$, passant par O.

c) L'image de $\mathcal{C}_2$ par la similitude $\psi_3 : z \longmapsto 2z - 1$ est le cercle de centre $\Omega' = \psi_3(\Omega)$, d'affixe $1 - 4i$, passant par $\psi_3(O)$, d'affixe -1.

Ainsi, l'image par $\varphi : z \longmapsto \dfrac{1+z}{1-z}$ de la droite d'équation $2x + 4y = 1$ est le cercle de centre Ω' d'affixe $1 - 4i$ passant par le point d'affixe -1.

15. **Image d'une droite ou d'un cercle par une homographie**

D'après l'alternative 3, une homographie se décompose en :

$$\varphi(z) = az + b \quad \text{ou} \quad \varphi(z) = \alpha + \frac{1}{\beta z + \gamma}$$

Dans le premier cas, φ est une similitude et l'image d'une droite ou d'un cercle est une droite ou un cercle.

Dans le second cas, $\varphi = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_3$ où :

a) ψ_3 est la similitude $z \longmapsto \beta z + \gamma$,

b) ψ_2 est l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$,

c) ψ_1 est la translation $z \longmapsto z + \alpha$.

Si Δ est un droite ou un cercle, son image Δ_1 par ψ_1 est une droite ou un cercle ; l'image de Δ_2 par ψ_2 est :

a) une droite passant par O si Δ_1 est une droite passant par O (cf question 8),

b) un cercle passant par O si Δ_1 est une droite ne passant pas par O (cf question 6),

c) une droite qui ne passe pas par O si Δ_1 est un cercle passant par O (cf question 7),

d) un cercle qui ne passe pas par O si Δ_1 est un cercle ne passant pas par O (cf question 9)

Dans tous les cas, Δ_2 est une droite ou un cercle, et son image Δ_3 par la translation $z \longmapsto z + \alpha$ est encore une droite ou un cercle.

Ainsi, l'image d'une droite ou d'un cercle par une homographie est donc une droite ou un cercle.

— **Si quatre points sont cocycliques ou alignés, le birapport est réel**

Si A, B, C et D sont cocyclique ou alignés, l'image de la droite ou du cercle passant par A, B, C et D par l'unique homographie envoyant a, b et c sur 0, 1 et ∞ est une droite ou un cercle : en l'occurrence, ce ne peut être que la droite (Ox) (un cercle ne peut contenir le point ∞) ; donc $\varphi(d)$ est réel.

— **Si le birapport de quatre points est réel, ces points sont cocycliques ou alignés**

Nous pouvons déjà établir qu'une homographie est bijective et introduire sa bijection réciproque qui est aussi une homographie :

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{az+b}{cz+d} = y \quad \Leftrightarrow \quad az + b = czy + dy \\
&\Leftrightarrow \quad (a - cy)z = dy - b \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{dy - b}{-cy + a}
\end{aligned}$$

L'homographie réciproque de $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ est donc l'homographie $z \longmapsto \dfrac{dy-b}{-cy+a}$.

Si $\varphi(d)$ est réel, A, B, C et D sont les images des points d'affixe 0, 1, ∞ et $\varphi(d)$ par l'homographie réciproque de φ.

A, B, C et D appartiennent à l'image de la droite (Ox) par l'homographie φ^{-1} ; qui est une droite ou un cercle.

Ainsi, quatre points d'affixe a, b, c et d sont cocycliques ou alignés si et seulement leur birapport est un nombre réel.