Proposition de corrigé du devoir surveillé 3

Exercice 1

1. La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $]-1,1[$.

- $t = \sin(u)$
- $\mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u$
- $t = 0 \quad \leftrightarrow \quad u = 0$
- $t = x \quad \leftrightarrow \quad u = \mathrm{Arcsin}(x)$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{\mathrm{Arcsin}(x)} \frac{\cos(u)\mathrm{d}u}{(1-\sin(u)^2)\sqrt{1-\sin(u)^2}} = \int_0^{\mathrm{Arcsin}(x)} \frac{\cos(u)\mathrm{d}u}{(\cos(u)^2)|\cos(u)|} \\
&= \int_0^{\mathrm{Arcsin}(x)} \frac{\mathrm{d}u}{\cos(u)^2} \quad \text{avec } \cos(u) > 0 \text{ car } u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\
&= [\tan(u)]_0^{\mathrm{Arcsin}(x)} = \tan(\mathrm{Arcsin}(x)) \\
&= \frac{\sin(\mathrm{Arcsin}(x))}{\cos(\mathrm{Arcsin}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-\sin(\mathrm{Arcsin}(x))^2}} \text{ car } \cos(\mathrm{Arcsin}(x)) > 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.}$

2. Le discriminant de $z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0$ est $\Delta = (-(4+i))^2 - 4 \times 1 \times 5(1+i) = -5 - 12i$

On cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$:

$$\delta^2 = \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} x^2 + y^2 & = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \\ x^2 + y^2 & = -5 \\ 2xy & = -12 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} 2x^2 & = 8 \\ 2y^2 & = 18 \\ xy & < 0 \end{array}\right.$$

Donc $\delta = 2 - 3i$ convient et les solutions sont $z_1 = \frac{4+i-\delta}{2} = 1 + 2i$ et $z_2 = 3 - i$.

Ainsi, $\boxed{\text{les solutions de } z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0 \text{ sont } 1 + 2i \text{ et } 3 - i.}$

3. $$\begin{aligned}
(2-2i)^4 = iz^3(\sqrt{3}+3i)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^4 = e^{i\frac{\pi}{2}} z^3 \left(2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = e^{i\frac{\pi}{2}} z^3 \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad z^3 = \frac{2^6 e^{i\left(-\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)}}{12} = \frac{16}{3} e^{-i\frac{13\pi}{6}}
\end{aligned}$$

Ainsi, le théorème sur les racines troisièmes donne les solutions :

$$\boxed{\left\{ \sqrt[3]{\frac{16}{3}} e^{-i\left(\frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)} ; k \in [\![0,2]\!] \right\}}$$

4. $$\begin{aligned}\sin^2(2x)\cos(3x) &= \left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^2\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} \text{ d'après Euler}\\ &= -\frac{1}{8}\left(e^{4ix}-2+e^{-4ix}\right)\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\\ &= -\frac{1}{8}\left(e^{7ix}-2e^{3ix}+e^{-ix}+e^{ix}-2e^{-3ix}+e^{-7ix}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2}-2\,\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\cos(7x)-2\cos(3x)+\cos(x)\right) \text{ d'après Euler}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f(x)=\sin^2(2x)\cos(3x)=-\frac{\cos(7x)}{4}+\frac{\cos(3x)}{2}-\frac{\cos(x)}{4}.}$

5. • $$\begin{aligned}\sin(2x)=\cos(3x) &\Leftrightarrow \sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\\ &\Leftrightarrow 2x\equiv\frac{\pi}{2}-3x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x\equiv\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow 5x\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow x\equiv\frac{\pi}{10}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right] \quad \text{ou} \quad x\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{(1)}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5},-\frac{\pi}{2}+2k'\pi;\ k,k'\in\mathbb{Z}\right\}}$

• $$\begin{aligned}3\sin(x)+2<\cos(2x) &\Leftrightarrow 3\sin(x)+2<1-2\sin(x)^2\\ &\Leftrightarrow 2u^2+3u+1<0 \text{ en posant } u=\sin(x)\in[-1,1]\end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta=3^2-4\times2\times1=1$

Les racines sont $u_1=\frac{-3-1}{4}=-1$ et $u_2=-\frac{1}{2}$.

Le signe est donné par

u	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2u^2+3u+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, par lecture sur le cercle trigonométrique, $\boxed{\mathcal{S}_{(2)}=\left]-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right[\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}+2\pi\mathbb{Z}.}$

Exercice 2

Partie A

1. • Limite en $-\infty$: par composition et somme de limites nous avons :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \exp x=+\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to-\infty}1+e^{-2x}=+\infty.$$ De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f=+\infty}$.

• Limite en $+\infty$: comme $\lim\limits_{-\infty}\exp=0$ et $\ln 1=0$ on a

$$\lim_{x\to+\infty}-2x=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}1+e^{-2x}=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\lim_{+\infty}f=0}$$

2. Pour étudier le sens de variation de f, nous allons étudier le signe de sa dérivée. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition.

Soit $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(1+e^{-2x})'\times\frac{1}{1+e^{-2x}}=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Comme $\exp>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)<0$, donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$

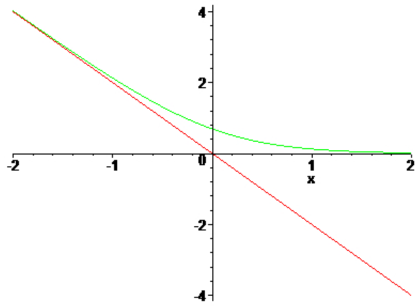
3. • Méthode 1 : Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \ln[e^{-2x}(e^{2x}+1)] = \ln(e^{-2x}) + \ln(1+e^{2x}) \text{ avec } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-2t} > 0 \text{ et } 1+e^{2t} > 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = -2x + \ln(1+e^{2x}).}$

• Méthode 2 : montrer que $g : x \mapsto -2x + \ln(1+e^{2x})$ vérifie $g' = f'$ et $g(0) = f(0)$: avoir la même dérivée et la même valeur en un point donnent deux fonctions égales. En effet, deux fonction ayant la même dérivée différent d'une constante.

• De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{2x} = 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f - (-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^{2x}) = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -2x \text{ est une asymptote oblique à } \mathcal{C}_f \text{ en } -\infty.}$
Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(1+e^{2x}) > 0$ la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.
4. On déduit l'allure de la courbe représentative de f.



Partie B

5. a) • Inégalité de droite : $t \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 1+t \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.
• **Méthode** : étude du signe de la différence : soit $t \geq 0$

$$1 - t - \frac{1}{1+t} = \frac{1-t^2-1}{1+t} = -\frac{t^2}{1+t} \leq 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ 1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1.}$

b) Soit $x \geqslant 0$. L'inégalité montrée à la question précédente est vraie pour tout $t \in [0; x]$.
Par ailleurs les fonctions $t \mapsto 1-t$, $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et $t \mapsto 1$ sont continues sur $[0, x]$.
Enfin, la croissance de l'intégrale donne :

$$\int_0^x (1-t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x 1\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x \leqslant [\ln(1+t)]_0^x \leqslant [t]_0^x$$
$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.}$

6. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Appliquons le résultat de la question précédente à $x = e^{-k} > 0$

$$e^{-k} - \frac{e^{-2k}}{2} \leqslant \ln\left(1 + e^{-k}\right) = f\left(\frac{k}{2}\right) \leqslant e^{-k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-k}-\frac{e^{-2k}}{2}\right) \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} e^{-k}$$

On reconnait les termes successifs de suites géométriques de raison e^{-1}, e^{-2} et e^{-1} respectivement, on a donc :

$$e^{-1}\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}-\frac{1}{2}\ e^{-2}\frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}} \leqslant S_n \leqslant e^{-1}\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$$

Après simplification, on obtient bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1-e^{-n}}{e-1}-\frac{1}{2}\frac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leqslant S_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{e-1}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $e^{-n} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 1-e^{-n} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1-e^{-n}}{e-1} \leqslant \dfrac{1}{e-1}$ car $e-1>0$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \dfrac{1}{e-1} \text{ : la suite } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ est majorée.}}$

c) Montrons que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante :
soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1}-S_n = f\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = \ln(1+e^{-n-1}) > 0$
Ainsi la suite est croissante et majorée d'après la question précédente.
Le théorème de limite monotone donne que $\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

d) Reprenons l'inégalité établie à la question B.6.a) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1-e^{-n}}{e-1}-\frac{1}{2}\frac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leqslant S_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{e-1}$$

Elle est composée de suite convergente car $e^{-n} \to 0$ et $S_n \to \ell$.
Le théorème de passage à la limite donne :

$$\frac{1}{e-1}-\frac{1}{2(e^2-1)} \leq \ell \leq \frac{1}{e-1} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2(e^2-1)} \leq \ell-\frac{1}{e-1} \leq 0$$

Ainsi, $\boxed{\left|\ell-\dfrac{1}{e-1}\right| \leq \dfrac{1}{2(e^2-1)}.}$

Partie C

7. La fonction $t \mapsto \ln(1+e^{-2t})$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $t \mapsto \ln(1+e^{-2t})$ s'annulant pour $x=0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est donc dérivable sur } [0;+\infty[, \text{ et } F'=f.}$
Or $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)>0$ donc $\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[.}$
8. a) La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc si $1 \leqslant t \leqslant 1+a$ alors $\dfrac{1}{1+a} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant 1$. Ainsi $\boxed{\forall t \in [1;1+a],\ \dfrac{1}{1+a} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant 1.}$

b) Considérant la comparaison précédente, portant sur trois applications continues sur $[1, 1+a]$.
La croissante de l'intégrale donne :

$$\int_1^{1+a} \frac{1}{1+a}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{1+a} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{1+a} 1\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{a}{1+a} \leqslant \ln(1+a) \leqslant a}$$

9. Soit $t \in \mathbb{R}_+$, en posant $a = e^{-2t} > 0$, la relation précédente donne :

$$\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leqslant \ln(1+e^{-2t}) \leqslant e^{-2t}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, la comparaison de ces trois applications continues sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi sur $[0; x]$ et la croissance de l'intégrale donnent :

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x e^{-2t}\mathrm{d}t}$$

Calculons les intégrales :
$\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) + \frac{1}{2}\ln 2$
Et $\displaystyle\int_0^x e^{-2t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x = -\frac{1}{2}\,e^{-2x} + \frac{1}{2}$
On a donc bien montré que :

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{-2x}}$$

10. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-2x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,e^{-2x} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{-2x} < \frac{1}{2}$

On en déduit, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) < \frac{1}{2}$: $\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc bien majorée sur } \mathbb{R}_+.}$
De plus, d'après C.7), la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, $\boxed{F \text{ admet une limite finie en } +\infty.}$

b) Considérant l'inégalité obtenue à la question C.9), portant sur des fonctions admettant une limite en $+\infty$, le théorème de passage à la limite donne : $\frac{1}{2}\ln 2 \leqslant I \leqslant \frac{1}{2}$.

11. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après A.2), la fonction f est décroissante (et exp est positive) donc

$$n \leq t \leq n+1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \ln(1+e^{-2(n+1)}) \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq \ln(1+e^{-2n})$$

Considérant cette comparaison de fonctions continues sur $[n; n+1]$ (dont deux sont constantes par rapport à t), la croissance de l'intégrale donne :

$$0 = \int_n^{n+1} 0\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2n})\mathrm{d}t = \ln(1+e^{-2n})(n+1-n)$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_n \leqslant \ln(1+e^{-2n}).}$

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+e^{-2n}) = \ln(1) = 0$, par encadrement on obtient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

12. a) Soit $n \in \mathbb{N}$; la relation de Chasles permet de relier toutes les intégrales :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \ln(1+e^{-2t})\mathrm{d}t = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\mathrm{d}t$$

Donc $\boxed{T_n = F(n+1)}$.

b) On a montré à la question C.10.a) que la fonction F a une limite finie en $+\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = I$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (T_n) \text{ est donc convergente, et sa limite est } I.}$

Exercice 3

1. **Étude de** f
f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable une infinité de fois car obtenue comme somme de fonctions dérivables une infinité de fois, de dérivées successives :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) + x \\ f''(x) &= -\cos(x) + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

f est une fonction paire, f' une fonction impaire.
$f'' \geq 0$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f'(0) = 0$, nous pouvons en déduire le tableau de variation de f puis le signe de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	
					$+\infty$
				$\nearrow$	
$f'(x)$			0		
		$\nearrow$			
	$-\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
	$+\infty$				$+\infty$
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		
$f(x)$		$+$	0	$+$	

2. **Une inégalité pour** $\cos$
D'après le tableau de variation précédent, nous pouvons en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} \\ &\Rightarrow \quad \cos(x) \geq \frac{1}{2}\left(2 - x^2\right) \end{aligned}$$

Lorsque $x \in \left]0, \sqrt{2}\right]$, $x^2 \leq 2$ donc $2 - x^2 \geq 0$ et nous pouvons conclure :

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \sqrt{2}\right], \quad \cos(x) \geq 0}$$

Comme $\dfrac{\pi}{2}$ est le plus petit réel positif x tel que $\cos(x) = 0$, alors un raisonnement par l'absurde donne : $\boxed{\sqrt{2} \leq \dfrac{\pi}{2}}$

3. **Étude de** g
g est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable une infinité de fois car obtenue comme somme et produit de fonctions dérivables une infinité de fois, de dérivées successives :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x - 2x\cos(x) + \left(4 + x^2\right)\sin(x) \\ g''(x) &= -2 \underbrace{-2\cos(x) + 2x\sin(x)}_{D(-2x\cos(x))} + \underbrace{2x\sin(x) + \left(4 + x^2\right)\cos(x)}_{D((4+x^2)\sin(x))} \end{aligned}$$

En regroupant les termes :

$$g''(x) = -2 + \left(2 + x^2\right)\cos(x) + 4x\sin(x)$$

Dérivons à nouveau :

$$g^{(3)}(x) = \underbrace{2x\cos(x) - \left(2 + x^2\right)\sin(x)}_{D[(2+x^2)\cos(x)]} + \underbrace{4\sin(x) + 4x\cos(x)}_{D[4x\sin(x)]}$$

En regroupant les termes :

$$g^{(3)}(x) = 6x\cos(x) + \left(2 - x^2\right)\sin(x)$$

Notons que $g(0) = g'(0) = g''(0) = g^{(3)}(0) = 0$.
Notons que g est une fonction paire, g' une fonction impaire, g'' une fonction paire et et $g^{(3)}$ une fonction impaire.
Pour identifier le signe de $g^{(3)}(x)$, il suffit de le faire lorsque $x \geq 0$, $g(-x)$ étant du signe opposé.

$$g^{(3)}(x) = 6x\cos(x) + \left(2 - x^2\right)\sin(x)$$

Lorsque $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, comme $\sqrt{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$ nous savons que $\cos(x) \geq 0$, $\sin(x) \geq 0$. De plus $x^2 \leq 2$ donc $2 - x^2 \geq 0$: nous en déduisons que $g^{(3)}(x) \geq 0$.
Nous pouvons en déduire le tableau de variation de g puis le signe de g sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$:

x	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$
$g^3(x)$			0	$+$	
$g''(x)$			0	$\nearrow$	
$g''(x)$			0	$+$	
$g'(x)$			0	$\nearrow$	
$g'(x)$			0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$+$	0	$+$	

4. **Un encadrement de** $\cos$
Nous avons donc démontré que, pour tout $x \in \left[0, \sqrt{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
\left(4 - x^2\right) - \left(4 + x^2\right)\cos(x) \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(4 - x^2\right) \geq \left(4 + x^2\right)\cos(x) \\
&\Rightarrow \quad \frac{4 - x^2}{4 + x^2} \geq \cos(x) \\
&\Rightarrow \quad 1 - \frac{2x^2}{4 + x^2} \geq \cos[x)
\end{aligned}$$

De même, nous avons démontré que : $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x)$
Ainsi, la fonction cos étant paire, ainsi que les deux autres fonctions impliquées dans les inégalités, nous en déduisons que

$$\boxed{\forall x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right],\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{2x^2}{4 + x^2}}$$

Nous obtenons un encadrement de $\cos(x)$ de précision $\epsilon(x)$ définie par :

$$\epsilon(x) = \frac{4 - x^2}{4 + x^2} - \frac{2 - x^2}{2} = \frac{1}{2\left(4 + x^2\right)}\left(2\left(4 - x^2\right) - \left(2 - x^2\right)\left(4 + x^2\right)\right) = \frac{x^4}{2\left(4 + x^2\right)} \leq \frac{x^4}{8}$$

Nous obtenons un encadrement de $\cos(x)$ de précision $\epsilon(x)$:

$$\epsilon(x) = \frac{x^4}{2\,(4+x^2)} \leq \frac{x^4}{8}$$

Lorsque $|x| \leq 0.1$, on obtient ainsi une valeur approchée de $\cos(x)$ avec une précision de près de 5 décimales.

Remarque :

Le polynôme $P : t \mapsto 1 - \frac{t^2}{2}$ est le *polynôme de Taylor* d'ordre 2 pour la fonction cos, la fraction rationnelle $F : t \mapsto \frac{4-t^2}{4+t^2}$ est l'*approximant de Padé* d'ordre $(2, 2)$ pour la fonction cos.

Le *polynôme de Taylor* d'ordre n pour une fonction f est l'unique polynôme de degré au plus n qui coïncide (ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n) avec la fonction f en 0 ; l'*approximant de Padé* d'ordre (n, p) pour une fonction f est l'unique fraction rationnelle $\frac{N}{D}$ où le numérateur N est un polynôme de degré au plus n, le dénominateur D un polynôme de degré au plus p qui coïncide (ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n + p$) avec la fonction f en 0.

Comme nous l'avons démontré dans cet exercice, les polynômes de Taylor et les approximants de Padé de cos donnent un bonne approximation de la fonction cos.

Programme de MPSI

Les *polynômes de Taylor*[1] sont au programme de MPSI : nous aurons l'occasion d'énoncer et de démontrer différentes formules impliquant ces polynômes (formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange).

Les *approximants de Padé*[2] ne sont pas inscrits au programme de la prépa.

1. La première mention des *polynômes de Taylor* remonte à un courrier du mathématicien anglais Brook Taylor (1685–1731) à John Machin (1680–1751) en 1712. Il développe cette théorie dans le livre *Methodus incrementorum directa et inversa* publié en 1715

2. Les *approximants de Padé* sont définis dans la thèse soutenue en 1892 par le mathématicien français Henri Padé (1863–1953).