DS 3

Mercredi 16 octobre 2024 – durée : 2h h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Vrac

1. Soit $x \in]-1,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0$
3. Résoudre $(2-2i)^4 = iz^3(\sqrt{3}+3i)^2$
4. Linéariser : $f(x) = \sin^2(2x)\cos(3x)$
5. Résoudre :

$$(1) \quad \sin(2x) = \cos(3x) \qquad \text{et} \qquad (2) \quad 3\sin(x) + 2 < \cos(2x)$$

Exercice 2

Dans tout le problème, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+e^{-2x})$.

Partie A

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = -2x + \ln(1+e^{2x})$.
   En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote en $-\infty$.
4. Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Partie B

5. a) Établir que pour tout réel positif ou nul t on a : $1 - t \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$.

   b) En déduire que, pour $x \geqslant 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

6. On considère la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{2}\right)$$

   a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1-e^{-n}}{e-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leqslant S_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{e-1}$$

   b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est majorée.

   c) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.

   d) Montrer que :

$$\left|\ell - \frac{1}{e-1}\right| \leqslant \frac{1}{2(e^2-1)}$$

Partie C

Pour tout x dans l'intervalle $[0; +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\mathrm{d}t$$

7. Justifier que F est dérivable sur $[0; +\infty[$ et étudier le sens de variation de F sur $[0; +\infty[$.

8. Soit a un réel strictement positif.

   a) Montrer que : $\forall t \in [1; 1+a]$, $\dfrac{1}{1+a} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant 1$.

   b) En déduire que :

$$\frac{a}{1+a} \leqslant \ln(1+a) \leqslant a$$

9. Soit x un réel strictement positif.
   Déduire de la question précédente que :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x e^{-2t}\mathrm{d}t,$$

   puis que :

$$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{-2x}$$

10. a) Montrer que la fonction F est majorée sur $[0; +\infty[$.
    En déduire que F admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On note $I = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

    b) Établir que $\dfrac{1}{2}\ln 2 \leqslant I \leqslant \dfrac{1}{2}$.

11. Pour n entier naturel, on pose :
$$u_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\mathrm{d}t.$$
 a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\forall t \in [n; n+1]$, $0 \leqslant \ln(1+e^{-2t}) \leqslant \ln(1+e^{-2n})$.
 En déduire que :
$$0 \leqslant u_n \leqslant \ln(1+e^{-2n})$$
 b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
12. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
 a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer T_n à l'aide de F et de n.
 b) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 3 - Approximation de cos

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$$

1. Vérifier que f a une dérivée seconde et identifier le signe de f''.
 Quelle est la parité de f ? de f' ? Calculer $f'(0)$ et en déduire le tableau de variation de f puis le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\cos(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \sqrt{2}\right]$, puis que $\sqrt{2} \leq \frac{\pi}{2}$.
 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \left(4 - x^2\right) - \left(4 + x^2\right)\cos(x)$$
3. Vérifier que g a une dérivée troisième et identifier le signe de $g^{(3)}$ sur $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.
 Quelle est la parité de g ? de g' ? Calculer $g'(0)$, $g''(0)$ et en déduire le tableau de variation de g sur $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, puis le signe de g sur cet intervalle.
4. En déduire que, pour tout $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$:
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{2x^2}{4+x^2}$$
 Indication : On pourra remarquer que $\frac{4-x^2}{4+x^2} = 1 - \frac{2x^2}{4+x^2}$

 Quelle précision obtient-on pour encadrer $\cos(x)$?