Matrices et systèmes

$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Les matrices

1.1 Définitions

Définition – **Matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ou matrice de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Les $a_{i,j}$ sont appelés coefficients de A (l'indice de la ligne est donné en premier). On note aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.
L'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemples

1. La matrice suivante est élément de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & e^3 \\ 4 & -\pi & 0 \end{pmatrix}$.

2. La matrice $B = (i+j)_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 2}}$ est la matrice : $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Définition – **Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée**
Les matrices de $\mathcal{M}_{1,p}$ sont appelées matrices lignes.
Les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}$ sont appelées matrices colonnes.
Lorsque $p = n$, les matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ (noté aussi $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) sont appelées matrices carrées d'ordre n.

Remarque – Les n-uplets de $\mathbb{K}^n$, $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ sont parfois identifiables à une matrice ligne, $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, ou à une matrice colonne, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition – **Matrices carrées particulières**
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que :
- *A est triangulaire supérieure si, pour tout $i > j$, on a $a_{i,j} = 0$: $A \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K})$,*
- *A est triangulaire inférieure si, pour tout $i < j$, on a $a_{i,j} = 0$: $A \in \mathcal{T}_n^i(\mathbb{K})$,*
- *A est diagonale si pour tout $i \neq j$, on a $a_{i,j} = 0$.*

[1] à compléter

Donner des exemples de matrices particulières définies ci-avant dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, etc.

Définition – **Symbole de kronecker**

Le symbole de Kronecker est défini pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$ par $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Définition – **Matrices particulières**

- *La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle.*
- *Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, la matrice* ***élémentaire*** *$E_{ij} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice avec dont tous les coefficient sont nuls excepté celui à la position (i,j) qui vaut 1 : $E_{ij} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1\leq k,\ell\leq n}$.*
- *La matrice carrée d'ordre n $I_n = (\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est appelée matrice identité d'ordre n.*
- *Une matrice carrée de la forme αI_n, avec $\alpha \in \mathbb{K}$, est dit scalaire.*

[2] à compléter

Donner des exemples de matrices particulières définies ci-avant.

1.2 Opérations sur les matrices

Définition –
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ *et* $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ *deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*, on pose :*

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \qquad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

[3] à compléter

Exemple

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & \pi & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 4 & 2\\-1 & -\pi & 1\end{pmatrix} = \dots \qquad 3\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix} = \dots$$

Remarque – L'addition de matrices est associative et commutative : pour tout $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$(A+B)+C = A+(B+C) \qquad A+B = B+A$$

1.3 Transposition

Définition – Transposée d'une matrice
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. On appelle transposée de* A *et on note* A^{T}*, la matrice* $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *définie par :* $\forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ b_{i,j} = a_{j,i}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1}\\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{n,p}\end{pmatrix}.$$

[4] à compléter

Exemple

Pour $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 3 & -2\end{pmatrix}$ alors $A^{\mathrm{T}} = \dots$

Proposition – *Soient* A *et* B *deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*, alors :*

(i) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$

(ii) $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$

(iii) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$

[5] à compléter

On peut introduire la notation $\mathcal{C}_{i,j}(M)$ pour désigner le coefficient en position (i,j) de la matrice M.

Démonstration –

Définition – Matrice symétrique, antisymétrique
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée.* A *est dite symétrique si* $A^{\mathrm{T}} = A$ *et antisymétrique si* $A^{\mathrm{T}} = -A$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n *symétriques est noté* $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$*, celui des matrices antisymétriques* $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice : Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

[6] à compléter

Solution –

[7] à compléter

Exemple

La matrice A est symétrique, la matrice B antisymétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & \\ 2 & -3 & \end{pmatrix}.$$

Exercices :

1. Montrer, par analyse-synthèse, que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists!(S,A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}); \quad M = S + A$$

2. Donner la décomposition de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[8] à compléter

Solution –

2 Produit matriciel

2.1 Produit matrice×matrice colonne

Définition – Produit matrice×matrice colonne

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_j)_{1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On définit le produit AX comme étant la matrice colonne $AX = (y_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j.$$

On multiplie donc une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ pour obtenir une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3b - 2c \\ 4a - c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Remarque – La matrice colonne AX est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

[9] à compléter

Exercice : Calculer : $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dots$

2.2 Produit matrice×matrice

Définition – Produit matrice×matrice

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit le produit AB comme étant la matrice $AB = (c_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ où, pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}.$$

On multiplie donc une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ pour obtenir une matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Remarques –

1. Si $q = 1$, on retrouve la définition du produit matrice×matrice colonne. La k-ième colonne de AB est le produit de A par la k-ième colonne de B.

2. **Attention !** Un produit de matrices est compatible si le nombre de colonnes de la matrice de gauche est égal au nombre de lignes de la matrices de droite.

[10] à compléter

Exemple

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & & \\ & & \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & & \\ & & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que $AB \neq BA$. **Attention !** Le produit matriciel n'est pas commutatif.

Exercice : Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer CD et DC.

[11] à compléter

Solution – ■

Exercices :

1. Calculer I_3A et AI_2 avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $E_{1,2}E_{1,3}$, $E_{2,3}E_{3,1}$.
3. Généralisons dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en déterminant $E_{i,j}E_{k,l}$ où $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$. **Prog**
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\Big(\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{K}, \quad A = \alpha I_n$$

[12] à compléter

Solution – ■

Exercices :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 = AA$ et $A^3 = A^2A$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer BC

[13] à compléter

Solution – ■

Attention ! Le produit matriciel n'est pas intègre : pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, C \in c\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

$$AB = 0_{\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})} \quad \not\Rightarrow \quad A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \text{ ou } B = 0_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})} \qquad \text{et} \qquad AB = AC \quad \not\Rightarrow \quad B = C$$

Définition – Puissances d'une matrice carrée

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit A^k par : $A^0 = \mathrm{I}_n$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Exercice : Montrer que si A est diagonale telle que $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors

$$A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$$

[14] à compléter

Solution –

Attention ! $A^p \neq (a_{ij}^p)$ en particulier $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix}$.

Cependant, pour une matrice diagonale $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$.

Définition – Matrice nilpotente
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
De plus, p est appelé indice de nilpotence si $A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

2.3 Propriétés du produit matriciel

Proposition – *Soient n, p, q et r des entiers naturels non nuls.*
(i) Pour toutes les $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a : $(A+B)C = AC + BC$.
(ii) Pour toutes les $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a : $A(B+C) = AB + AC$.
(iii) Pour toutes les $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
(iv) Pour toutes les $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $(AB)C = A(BC)$.
(v) Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a : $\mathrm{I}_n A = A\mathrm{I}_p = A$.
(vi) Pour toutes les $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a : $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.
(vii) Pour toutes les $A, B \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{T}_n^i$] alors $AB \in \mathcal{T}_n^s$ [resp. $\mathcal{T}_n^i$].

[15] à compléter

Solution – Faire deux ou trois preuves dont (vi)

Théorème – Formule du binôme
Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ (on dit que A et B commutent), alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

[16] à compléter

Remarque – Calculer $(A+B)^2 - \left(A^2 + 2AB + B^2\right) = \ldots$ L'hypothèse de commutativité est essentielle à la formule du binôme.

Méthode : Application au calcul de la puissance d'une matrice décomposée par $A = B + C$ avec B et C qui commutent et où les puissances de B et de C sont faciles à déterminer.

[17] à compléter

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On veut déterminer A^n pour $n \geq 2$.

On note que $A = 2I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec I_2 et N qui commutent et N nilpotente : $N^2 = 0$.

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (2I_2 + N)^n = \ldots$

2.4 Inversibilité des matrices carrées

Proposition - Définition – Matrice inversible. Inverse d'une matrice
Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = \mathrm{I}_n.$$

Si une telle matrice B existe, elle est unique et appelée inverse de A. On la note A^{-1}.
*L'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles est le **groupe linéaire** d'ordre n, noté $GL_n(\mathbb{K})$.*

[18] à compléter

Démonstration –

Montrer l'unicité de l'inverse.

Exemples

1. I_n est inversible et $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.
2. **Méthode :** Lorsque l'on connaît un polynôme annulateur de A dont le terme constant est non nul

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 2A + 3\mathrm{I}_n = 0$. Alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}(2\mathrm{I}_n - A)$.

Exercice : Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer CD et DC.
En déduire que C est inversible et donner C^{-1}.

[19] à compléter

Solution –

Remarque – Si $AB = AC$, en général on ne pourra pas en déduire $B = C$.
Mais si A est inversible, en multipliant par A^{-1} à gauche il vient $B = C$. De même pour $BA = CA$.

Proposition – *Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{K})$, alors :*
(i) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$,
(ii) AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ (notée A^{-p}),
(iv) A^{T} est inversible et $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

[20] à compléter

Démonstration –

Proposition – *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = \mathrm{I}_n$. Alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.*

Démonstration –

ADMIS pour le moment.

3 Systèmes linéaires

$$(S) \qquad \begin{cases} x + 2y - z + 3t &= 1 \\ 2x + y + z + 3t &= 2 \\ 3x + y + z + 4t &= 3 \\ x + 2y - z + 4t &= 4 \end{cases}$$

Exercice : Donner l'écriture matricielle associée à (S).

[21] à compléter

Solution –

3.1 Définition

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$.
On appelle système linéaire à n équations et à p inconnues tout système (S) de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

- les $(x_1, \ldots, x_p)$ sont les **inconnues** de (S), on note $X = (x_i)_{1 \le i \le p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$,
- les (a_{ij}) sont les **coefficients** de (S) (i-ème équation et j-ème inconnue), on note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
- le **second membre** de (S) est $(b_i)_{1 \le i \le n}$, on note $B = (b_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,
- écriture matricielle associée : $AX = B$,
- le système et dit **homogène** si son second membre est nul,
- le **système homogène associé** à (S) est le système obtenu en remplaçant le second membre par $(0)_{1 \le i \le n}$:

$$(\mathcal{H}) : AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

- (S) est dit **compatible** s'il possède une solution, c'est-à-dire si B est une combinaison linéaire des colonnes de A
  impossible s'il n'admet aucune solution,
  indéterminé s'il admet plusieurs solutions,
- deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils admettent le même ensemble de solutions.

Proposition – **Structure de l'ensemble solution**
Avec les mêmes notations, $\mathcal{S}_{(\mathcal{S})} = \mathcal{S}_{(\mathcal{H})} + X_0$ où X_0 est une solution particulière de $(\mathcal{S})$.

[22] à compléter

Démonstration –
Procéder par double inclusion. ■

3.2 Méthode du pivot de Gauss sur les lignes

➢ Trois opérations élémentaires : avec i, j des indices de lignes et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange des lignes i et j
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$: multiplication d'une ligne par un coefficient non nul
- $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$: ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par β

Théorème – Deux systèmes, dont l'un est obtenu à partir de l'autre par une des trois opérations élémentaires, sont équivalents.

Remarque – Les deux dernières opérations peuvent fusionner en

$$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j \text{ avec } \alpha \neq 0$$

Attention ! Lorsque les coefficients du système dépendent de paramètres, la condition $\alpha \neq 0$ peut nous amener à faire une discussion de cas.

➢ Résolution d'un système linéaire :
1. Ordonner les inconnues à gauche et placer le second membre à droite.
2. Placer un **pivot** en x_1 sur la première ligne, par échange de ligne ($L_i \leftrightarrow L_j$). Le pivot est un terme de la forme ax_1 avec $a \neq 0$ (prendre, si possible, $a = \pm 1$).
3. Éliminer l'inconnue x_1 dans toutes les autres équations. Par exemple : dans L_j : $cx_1 + \cdots = b_j$

$$L_j \leftarrow aL_j - cL_1 \text{ ou } L_j \leftarrow L_j - \frac{c}{a}L_1$$

4. Recommencer avec l'inconnue suivante sur la ligne suivante en cherchant un pivot éventuel parmi les lignes au-dessous. Réitère.

5. Arrêter lorsque les dernières lignes ne contiennent plus d'inconnue.

- Les inconnues ayant servi de pivot sont appelées **inconnues principales**.
- Les autres sont appellées **inconnues secondaires**.
- On appelle **équations de compatibilités**, les équations, sans inconnue, éventuelles restantes.

6. Déplacer les inconnues secondaires à droite des égalités : ils deviennent des paramètres du système.
7. Normaliser (rendre égal à 1) chaque coefficient d'inconnue principale. Le système est résolu : conclure.

Remarques –

1. L'étape 3 peut être menée uniquement au-dessous de la diagonale, on obtient alors un système triangularisé. Pour le résoudre, il suffit de remonter (par substitution) équation par équation.

2. Le nombre de solutions d'un système linéaire est soit nul, soit égal à un, soit infini.
3. On peut rédiger la résolution avec une suite d'équivalence de système ou mettre un formalisme matriciel, comme ci-après.

Exemple

Résolvons (S) avec un formalisme matriciel :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \left\{ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\text{Ainsi, } (S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lllll} x & & & & = -2 \\ & y & & & = -3 \\ & & z & & = 0 \\ & & & t & = 3 \end{array}\right., \text{ donc } \mathcal{S}_{(S)} = \{(2, -3, 0, 3)\}.$$

Exercice : Résoudre les systèmes suivants en utilisant les notations de systèmes et le formalisme matriciel.

$$(S_1) \ : \ \left\{\begin{array}{ll} x + 2y - z & = 1 \\ 3x - y + z & = 2 \\ 5x + 3y - z & = 3 \end{array}\right. \qquad (S_2) \ : \ \left\{\begin{array}{ll} x - y + 3z & = -1 \\ x + y - z & = 1 \\ 7x + y + 5z & = 1 \end{array}\right. \qquad (S_3) \ : \ \left\{\begin{array}{ll} y - z & = -1 \\ x + 2y + z & = 1 \\ x + 3y + z & = -1 \end{array}\right.$$

[23] à compléter

Solution – ... On trouve $\mathcal{S}_{(S_1)} = \emptyset$, $\mathcal{S}_{(S_2)} = \{(-z, 1+2z, z); z \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{S}_{(S_3)} = \{(6 \quad -2 \quad -1)\}$. ■

Remarque – Le nombre de solutions est :
- nul lorsqu'il y a une équation de compatibilité non vérifiée,
- un si les éventuelles équations de compatibilités sont vérifiées et qu'il n'y pas d'inconnues secondaires,
- infini si les éventuelles équations de compatibilités sont vérifiées et qu'il y a une (au moins) inconnue secondaire.

Remarque – Méthode de l'inconnue auxiliaire :
Pour résoudre un système, il est parfois utile d'introduire une inconnue auxiliaire pour réécrire simplement le système.

Exercice : Introduire l'inconnue $y = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ pour résoudre (E) : $\left\{\begin{array}{llllll} & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 1 \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & +x_5 & = 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 5 \end{array}\right.$

[24] à compléter

Solution – ■

Définition – Système de Cramer
On appelle système de Cramer tout système linéaire à n équations et à n inconnues dont la matrice carrée associée est inversible.

Théorème – Un système cramérien possède une unique solution.

Démonstration –
Comme A est inversible, on puet multiplier à gauche par A^{-1} :

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad AX = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = I_nX = X = A^{-1}B$$

3.3 Interprétations

3.3.1 Interprétation géométrique d'un système

Exercice : Donner l'équation de la droite du plan passant par $A\ (5;7)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (a;b)$.

[25] à compléter

Solution –

Remarque – Un système à 2 inconnues est interprété comme la recherche de l'intersection d'autant de droites qu'il y a d'équations.

Exercice : Représenter graphiquement le système suivant, puis le résoudre géométriquement et algébriquement : $\begin{cases} 2x & +y & = 1 \\ x & -y & = 2 \end{cases}$.

[26] à compléter

Solution –

Remarque – Un système à 3 inconnues est interprété comme la recherche de l'intersection de plans de $\mathbb{K}^3$.

3.3.2 Interprétation matricielle des opérations élémentaires

Exercice : Calculer $E_{1,3}A$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$. Analyser la matrice obtenue en fonction des lignes de A.

[27] à compléter

Solution –

Proposition – *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $E_{i,j}A$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ excepté sur la i-ème ligne qui contient une copie de la j-ème ligne de A.*

Exemple
Approche du calcul *rapide* d'un produit de matrice par les lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} L_1 - L_3 \\ L_1 + L_2 \\ -L_2 + 2L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 5 & -2 & 6 \\ -2 & 12 & -17 \end{pmatrix}$$

[28] à compléter

Exercice : Effectuer ces calculs en exploitant les opérations sur les lignes induites par les coefficients de la matrice de gauche :

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \dots$
- $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \dots$

Corollaire – *Effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ revient à multiplier A à gauche par une matrice particulière.*

Exemple

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ est obtenue en multipliant à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[29] à compléter

Exercice : Compléter le tableau suivant associant opération et matrice multipliée par la gauche :

Matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$	Opération	Matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$	Opération
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$			$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$			$L_1 \leftrightarrow L_3$
	$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	

[30] à compléter

Exercice : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donner la matrice associée aux opérations élémentaires suivantes, pour une multiplication à gauche :

- $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$: ...
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$: ...
- $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$: ...
- $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$: ...

Remarque – Dans cette partie, nous avons établi que le produit, AB, de deux matrices revient à opérer sur les lignes de B des opérations induites par les coefficients de A.

- De façon analogue, $AE_{i,j}$ correspond à la matrice nulle excepté la j-ème colonne qui contient une copie de la i-ème colonne de A.

➢ De façon plus générale, le produit AB, de deux matrices, revient à opérer sur les colonnes de A des opérations induites par les coefficients de B.

4 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

4.1 Formalisme du système linéaire

Lemme – *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i \in [\![1,n]\!]$. On note $e_i = (\delta_{k,i})_{1\leq k\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alors Ae_i est égal à la matrice colonne de la i-ème colonne de A.*

Proposition – *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) A est inversible
(ii) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tous X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$AX = Y \Leftrightarrow X = BY.$$

En particulier, B est l'inverse de A.

Démonstration –
$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Soit X, Y tel que $AX = Y$ donc $A^{-1}AX = A^{-1}Y$ c'est-à-dire $I_nX = X = A^{-1}Y$ et $B = A^{-1}$ convient.
$\boxed{(ii) \Leftarrow (i)}$ • Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons $Y = AX$ alors $X = BY = BAX$ ou encore $I_nX - BAX = 0$ ou $(I_n - BA)X = 0$.
Ainsi, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $(I_n - BA)X = 0$.
En particulier, pour $i \in [\![1,n]\!]$, considérons $X = e_i$, alors $(I_n - BA)e_i = 0$ donne que la i-ème colonne de la matrice $I_n - BA$ est nulle. Ceci vaut pour tout i donc $I_n - BA = 0$ et donc $BA = I_n$.
• De même, pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons $X = BY$ alors $Y = AX = ABX$ ou encore $(I_n - AB)Y = 0$.
Ainsi, $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $(I_n - AB)Y = 0$.
En particulier, pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $Y = e_i$ on obtient que la i-ème colonne de $AB - I_n$ est nulle et par suite que $AB = I_n$.
• Ainsi $I_n = AB = BA$ donc A est inversible d'inverse B.

Méthode : Inverser une matrice revient à résoudre un système !

Exemple

Pour déterminer si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse éventuelle, on introduit un système : soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x & & +z & = & a \\ & 2y & +2z & = & b \\ x & +y & & = & c \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & \frac{1}{4}(2a - b + 2c) \\ y & = & \frac{1}{4}(-2a + b + 2c) \\ z & = & \frac{1}{4}(2a + b - 2c) \end{cases}$$

Ayant trouvé 3 pivots (donc pas d'équation de compatibilité et pas d'inconnue secondaire), la matrice A est inversible. Il vient :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Remarque – On note r le nombre de pivots trouvés lors de la résolution du système associé à une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :
- si $r = n = p$ alors la matrice est inversible,
- $p - r$ est le nombre d'inconnues secondaires,
- $n - r$ est le nombre d'équations d'incompatibilité.

Proposition – *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.*
Dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice : Étudier l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

[31] à compléter

Solution –

[32] à compléter

Démonstration –

Calcul de A^2 : $A^2 = \qquad\qquad = \ldots A + \ldots I_2$ donc $A \times \ldots = (bc - ad) I_2$.
Effectuons une disjonction de cas :

- soit $bc - ad \neq 0$,

- soit $bc - ad = 0$; raisonnons par l'absurde, supposons A inversible, alors

Proposition – *Une matrice triangulaire supérieure [resp. inférieure] est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. De plus, l'inverse est triangulaire supérieure [resp. inférieure].*
En particulier, l'inverse d'une matrice diagonale inversible est diagonale.

Exemple

Les matrices triangulaires $\begin{pmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 \\ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix}$ sont inversibles.

4.2 Formalisme revisité du pivot de Gauss

MÉTHODE – Inversion d'une matrice

Le système $AX = Y$ peut se réécrire $AX = I_n Y$ de formalisme matriciel $(A|Y)$ et $(A|I_n)$.
Les composantes de Y sont repérées par colonne sur le membre de droite !
A la fin de la réduction, lorsque A est inversible, on obtient le système $X = BY$ c'est-à-dire $(I_n|A^{-1})$.

$$\begin{array}{cc} A & I_n \\ \downarrow & \downarrow \\ I_n & A^{-1} \end{array}$$

Remarque – Lors de la résolution du système $AX = Y$ par la méthode du pivot de Gauss, les opérations élémentaires sur les lignes reviennent à multiplier à gauche la matrice A par des matrices T_i, on obtient :

$$AX = I_n Y \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{T_N \cdots T_2 T_1 A}_{=I_n} X = \underbrace{T_N \cdots T_2 T_1 I_n}_{=A^{-1}} Y \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = T_N \cdots T_2 T_1 I_n$$

On retrouve le méthode ci-avant pour déterminer l'inverse d'une matrice : faire la méthode du pivot de Gauss sur les lignes de A et I_n en même temps : $(A|I_n) \longrightarrow (I_n|A^{-1})$

Exemple

Étude de l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec un formalisme matriciel :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$

On trouve trois pivots, donc A est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

donc $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice : Étudier l'inversibilité de $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[33] à compléter

Solution – ... $\qquad B^{-1} = \dfrac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$