

DM 4

à rendre le lundi 4 novembre 2024

Fonctions indicatrices

Prog

Remarque : On note que pour tout $A \subset E$, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A^2$.

Remarque : Si E est fini, alors pour toute partie A de E , on appelle cardinal de A , noté $\text{Card}(A)$, le nombre d'éléments de A . En particulier, il vient :

$$\text{Card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Partie A - Indicatrices et opérations ensemblistes

Objectif : Utiliser les propriétés de l'indicatrice pour déterminer des propriétés ensemblistes

1. Soit A, B, C des parties de E .

- Exprimer $\mathbb{1}_{A \setminus (B \cup C)}$ et $\mathbb{1}_{(A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$.
- En déduire que $\mathbb{1}_{A \setminus (B \cup C)} = \mathbb{1}_{(A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$ et donc que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
- Procéder de même pour établir $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ et $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

On calculera l'indicatrice de chacun des ensembles et on utilisera le résultat de la remarque.

2. Utilisant les indicatrices, démontrer les règles de de Morgan pour A, B deux parties de E :

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

3. De même, démontrer les règles de distributivités pour A, B, C trois parties de E :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. La **différence symétrique** de A et B , deux parties de E , est définie par :

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

a) Montrer que : $\mathbb{1}_{A \Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$

b) Montrer que : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

c) Pour A, B, C des parties de E , montrer que : $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

5. Caractériser les relations suivantes à l'aide des indicatrices de $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$:

$$A \subset B \quad A \cap B = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup B \cup C = E$$

6. Pour $A, B \subset E$, identifier les ensembles associés aux indicatrices suivantes :

$$\mathbb{1}_C = \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_D = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$$

Partie B - Indicatrices et cardinalité

Objectif : Utiliser les propriétés de l'indicatrice pour déterminer des cardinaux

Dans cette partie, E est un ensemble de cardinal fini, $n \in \mathbb{N}$.

7. Soit $C = \{(A, B); A \subset B \subset E\}$.

a) Approche 1 : Montrer que $(A, B) \mapsto \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ est une bijection de C vers $\mathcal{F}(E, \{0, 1, 2\})$.

En déduire le cardinal de C .

b) Approche 2 : Compléter et expliquer les étapes du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Card}(C) &= \sum_{A \subset B \subset E} 1 \\
 &\quad \text{choix de } A \text{ puis de } B \setminus A \\
 &= \sum_{A \subset E} \sum_{(B \setminus A) \subset (E \setminus A)} 1 \\
 &\quad \text{discussion suivant le cardinal de } A : k = \text{Card}(A) \\
 &= \sum_{k=?}^? \sum_{\substack{A \subset E \\ \text{Card}(A)=k}} \sum_{(B \setminus A) \subset (E \setminus A)} 1 \\
 &\quad \dots \\
 &= \sum_{k=?}^? \sum_{\substack{A \subset E \\ \text{Card}(A)=k}} 2^{n-k} \\
 &\quad \text{le nombre de façons de choisir une partie de } k \text{ élément dans } E \text{ est : } \dots \\
 &= \dots \\
 &\quad \text{formule du binôme} \\
 &= (2 + 1)^n
 \end{aligned}$$

8. Dans le cas particulier où $E = \{1, 2, 3\}$, expliciter et déterminer $S_1 = \sum_{A \subset E} \text{Card}(A)$.

9. Compléter la démarche suivante permettant le calcul de $S_1 = \sum_{A \subset E} \text{Card}(A)$ (cas général)

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{A \subset E} \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) \\
 &\quad \text{on permute les deux sommes} \\
 &= \dots \\
 &\quad \dots \\
 &= \sum_{x \in E} \text{Card}(\mathcal{P}(E \setminus \{x\})) \\
 &\quad \dots \\
 &= \sum_{x \in E} 2^{n-1} = \dots
 \end{aligned}$$

10. Dans le cas particulier où $E = \{1, 2\}$, expliciter et déterminer $S_2 = \sum_{A, B \subset E} \text{Card}(A \cap B)$.

11. De même, calculer $S_2 = \sum_{A, B \subset E} \text{Card}(A \cap B)$ (cas général).

12. De même, calculer $S_3 = \sum_{A, B \subset E} \text{Card}(A \cup B)$