Corrigé du DM 6

Exercice 1

1. a) Soit $x, x' \in E$, alors en composant par h on obtient :

$$f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad h(f(x)) = h(f(x')) \quad \Rightarrow \quad g(x) = g(x')$$

Ainsi, $\boxed{\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad g(x) = g(x').}$

b) Soit $h_1, h_2 \in G^F$ telles que $h_1 \circ f = g$ et $h_2 \circ f = g$.
Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Alors $h_1(y) = h_1(f(x)) = g(x) = h_2(f(x)) = h_2(y)$. Donc $\boxed{h \text{ est unique.}}$

2. a) Soit $y \in F$. Comme f est surjection, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution.
On pose $z = g(x) \in G$ ce qui donne l'existence de z.
Montrons l'unicité de z. Soit x' un autre antécédent de y par f, c'est-à-dire $f(x') = y$ et $z' = g(x')$.
Alors :

$$y = f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad g(x) = g(x') \quad \Rightarrow \quad z = z'$$

Ainsi, $\boxed{\forall y \in F, \exists! z \in G \text{ tel que le système } \left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & y \\ g(x) & = & z \end{array}\right. \text{ admette au moins une solution } x \in E.}$

b) Soit $x \in E$, notant $y = f(x)$ et $z = g(x)$ alors par construction $h(y) = z$ c'est-à-dire $h(f(x)) = g(x)$. Ainsi, $\boxed{h \circ f = g.}$

c)
$$\begin{array}{lll} h \text{ est surjective} & \Leftrightarrow & \forall z \in G, \exists y \in F ; h(y) = z \\ & & \quad \text{comme } f \text{ est surjective, posant } f(x) = y \\ & \Leftrightarrow & \forall z \in G, \exists x \in E ; h(f(x)) = z \\ & \Leftrightarrow & \forall z \in G, \exists x \in E ; g(x) = z \\ & \Leftrightarrow & g \text{ est surjective} \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{h \text{ est surjective si et seulement si } g \text{ est surjective.}}$

d) Raisonnons par double implication.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ L'implication $\Rightarrow$ est donnée par hypothèse.
Montrons l'autre implication : soit $x, x' \in E$ tels que $g(x) = g(x')$ et donc $h(f(x)) = h(f(x'))$. Comme h est injective, il vient $f(x) = f(x')$.

$\boxed{(i) \Leftarrow (ii)}$ Soit $y, y' \in F$ tels que $h(y) = h(y')$.
Comme f est surjective, il existe $x, x' \in E$ tel $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Ce qui donne

$$h(f(x)) = h(f(x')) \quad \Rightarrow \quad g(x) = g(x') \quad \Rightarrow_{\text{d'après } (ii)} \quad f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad y = y'$$

donc h est injective.

Ainsi, $\boxed{h \text{ est injective si et seulement si } \big(\forall (x,x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = g(x')\big).}$

Exercice 2

1. On note que $z + \overline{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}\,(z) = 1$; donc $\boxed{D = \{a + ib ; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq \frac{1}{2}\}}$.

2. On a $f(z) = 1 \Leftrightarrow z = z + \overline{z} - 1 \Leftrightarrow \overline{z} = 1 \Leftrightarrow z = 1$ et posant $z = a + ib$:

$$f(z) = i \Leftrightarrow a + ib = i(2a - 1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 2a - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = -1 \end{array}\right.$$

Ainsi $\boxed{\overset{-1}{f}(1) = \{1\} \text{ et } \overset{-1}{f}(i) = \{-i\}}$.

3. Posons $z = a + ib$. On a

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{a+ib}{2a-1} = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2a-1} = a \\ \dfrac{b}{2a-1} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2a-2) = 0 \\ b(2a-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 1 \\ b = 0 \text{ ou } a = 1 \end{cases}$$

Les invariants de f sont : $\boxed{\{0, 1 + ib ; b \in \mathbb{R}\}}$

4. Posons $z = a + ib$ et $w = c + id$. On a :

$$f(z) = w \Leftrightarrow \frac{a+ib}{2a-1} = c + id \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2a-1} = c \\ \dfrac{b}{2a-1} = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c(2a-1) \\ b = d(2a-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2c-1) = c \\ b = d(2a-1) \end{cases}$$

Il y a deux cas :

— soit $2c = 1$, c'est-à-dire $c = \frac{1}{2}$ alors $0 = \frac{1}{2}$ qui est impossible, donc w n'a pas d'antécédent.

— soit $2c \neq 1$, c'est-à-dire $w \in D$: $f(z) = w \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{2c-1} \\ b = d\left(2\dfrac{c}{2c-1} - 1\right) = \dfrac{d}{2c-1} \end{cases}$

On note que la rôle de a, b d'une côté et de c, d d'une autre sont symétriques donc

$$f(z) = w \Leftrightarrow z = f(w)$$

Vérification : le calcul de $f \circ f$ donne bien id_D.

En conclusion, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } D \text{ dans } D \text{ et } f^{-1} = f.}$