DM 6

à rendre le mardi 12 novembre 2024

Exercice 1

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On suppose f surjective.

1. On suppose dans cette question qu'il existe $h : F \to G$ telle que $h \circ f = g$.

a) Montrer que, pour tout $(x, x') \in E^2$, on a : si $f(x) = f(x')$ alors $g(x) = g(x')$.

b) Montrer que h est unique.

2. On suppose dans cette question que, pour tout $(x, x') \in E^2$, on a :
si $f(x) = f(x')$ alors $g(x) = g(x')$.

a) Montrer que pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $z \in G$ tel que le système $\begin{cases} f(x) & = & y \\ g(x) & = & z \end{cases}$ admette au moins une solution $x \in E$.
On note $h(y)$ cet unique $z \in G$. On définit ainsi une application $h : F \to G$.

b) Montrer que $h \circ f = g$.

c) Montrer que h est surjective si et seulement si g est surjective.

d) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) h est injective,
(ii) pour tout $(x, x') \in E^2$, $f(x) = f(x')$ équivaut à $g(x) = g(x')$.

Exercice 2

Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\bar{z}$ le conjugué de z. On définit la fonction f par :

$$f(z) = \frac{z}{z + \bar{z} - 1}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. Déterminer les antécédents par f de 1 et i.
3. Déterminer les nombres complexes z invariants par f (c'est-à-dire tels que $f(z) = z$).
4. En étudiant les solutions de l'équation $f(z) = w$ en fonction du paramètre complexe w, montrer que f réalise une bijection de D sur D et déterminer la bijection réciproque.