

DM 5

à rendre le lundi 4 novembre 2024

Étude d'une équations d'ordre 1

1. Résolution d'une équation différentielle linéaire :

$$(\mathcal{E}) \quad ty' + y + \sin(t) = 0$$

- Donner la forme normalisée de l'équation ainsi que les intervalles d'études.
- Résoudre l'équation homogène.
- Utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer une solution particulière de (\mathcal{E})
- Donner la forme générale des solutions de (\mathcal{E}) .
- Étudier les raccordements possibles afin de définir un solution définie sur \mathbb{R} : commencer par trouver la ou les solutions continues sur \mathbb{R} et montrer qu'elle sont dérivables.

Indication : On pourra utiliser le fait que $\cos(t) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

2. Résolution d'une équation différentielle non linéaire :

$$(\mathcal{F}) \quad \forall t \in]0, +\infty[, \quad ty' = y + \sin(t)y^2$$

- Considérant une solution y de (\mathcal{F}) , sur un intervalle où y ne s'annule pas, identifier l'équation vérifiée par $z = \frac{1}{y}$.
- Réciproquement, montre que si z est une solution de \mathcal{E} ne s'annulant pas, alors y est une solution de (\mathcal{F}) .
- Donner l'intervalle de définition des solutions trouvées.

3. Montrer que les solutions de l'équation différentielle :

$$ty' = y + \sin(t)y^2$$

qui sont définies sur $]0, +\infty[$ se prolongent en des solutions sur \mathbb{R} .