Corrigé du DM 5

Étude d'une équations d'ordre 1

1. **Résolution d'une équation différentielle linéaire**
Résolution d'une équation différentielle linéaire :

$$(\mathcal{E}) \qquad ty' + y + \sin(t) = 0$$

a) *Forme normalisée :* L'équation peut se mettre sous forme résolue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$y' + a(t)y = b(t) \text{ en posant } a(t) = \frac{1}{t} \text{ et } b(t) = -\frac{\sin(t)}{t}$$

L'équation admet donc des solutions sur $\left]-\infty, 0\right[$ et sur $\left]0, +\infty\right[$.
Il est alors opportun d'étudier les raccordements éventuels en 0.
b) *Équation homogène :* Les solutions de l'équation homogène, $y' + a(t)y = 0$, sont de la forme $y(t) = K\exp(-A(t))$ où A est une primitive de $a : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ et K une constante. Nous en déduisons :

$$t \mapsto K\exp(-\ln(|t|)) = \frac{K}{|t|}$$

Quitte à remplacer K par $-K$ sur $\mathbb{R}_-^*$, on trouve aussi la solution $t \mapsto \dfrac{K}{t}$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{ t \mapsto \begin{cases} \frac{K_0}{t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{K_1}{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}, K_0, K_1 \in \mathbb{R} \right\}.}$
c) *Solution particulière :* Utilisons la méthode de variation de la constante.
Nous cherchons $K(t)$ tel que $y : t \mapsto \dfrac{K(t)}{t}$ soit solution de l'équation différentielle.
Astucieusement, pour $t \in I$, un intervalle du domaine, on a $K(t) = ty(t)$ donc $K'(t) = ty'(t) + y(t)$.
Ainsi, y est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ si et seulement si :

$$K'(t) + \sin(t) = 0$$

Nous en déduisons que K est une primitive de $-\sin$, c'est à dire : $K = \cos$ convient.
Ainsi, $\boxed{\text{une solution particulière est } t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}.}$
d) *Solution générale :* L'équation différentielle $ty' + y + \sin(t) = 0$ a des solutions sur $\left]-\infty, 0\right[$ et sur $\left]0, +\infty\right[$ de la forme :

$$y(t) = \frac{\cos(t) + \alpha}{t} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e) *Étude des raccordements en* 0 *:*
Une solution éventuelle sera de la forme :

$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(t)+\alpha_0}{t} & \text{si } t < 0 \\ \frac{\cos(t)+\alpha_1}{t} & \text{si } t > 0 \end{cases} \text{ avec } \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$$

- Continuité

Si $\alpha_0 \neq -1$ alors $f(t)$ a une limite infinie à droite de 0. De même à gauche si $\alpha_1 \neq -1$.
Dans le cas $\alpha_0 = \alpha_1 = -1$, comme cos est dérivable en 0, il vient :

$$\frac{\cos(t) - 1}{t} = \frac{\cos(t) - 1}{t - 0} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \cos'(0) = -\sin(0) = 0$$

Une éventuelle solution sur $\mathbb{R}$ est donc de la forme :

$$f(t) = \frac{\cos(t) - 1}{t} \text{ si } t \neq 0$$

prolongée par continuité en 0 par la valeur 0.

• Dérivabilité

Considérons maintenant la dérivabilité de f. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Étudions la limite de f' en 0, d'après l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{t}\left(f(t) + \sin(t)\right) = -\frac{\cos(t) - 1}{t^2} - \frac{\sin(t)}{t} \\ &= \frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} - \frac{\sin(t)}{t} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} - \frac{\sin(t)}{t} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$ (limite usuelle) alors $f'(t) \underset{x \to t \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$.
La dérivée ayant une limite finie en 0, f est dérivable en 0.
L'équation est maintenant aussi vérifiée en 0 :

$$0 \times f'(0) + f(0) + \sin(0) = f(0) = 0$$

Ainsi, l'équation différentielle $ty' + y + \sin(t) = 0$ a une unique solution qui se prolonge sur $\mathbb{R}$:

$$t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\cos(t) - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

2. **Résolution d'une équation différentielle non linéaire**

Résolvons sur $\left]0, +\infty\right[$ l'équation différentielle :

$$ty' = y + \sin(t)y^2$$

Remarquons que cette équation peut se mettre sous forme résolue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mais que ce n'est pas une équation linéaire. Sans indication, nous ne disposons pas de théorème de cours à appliquer pour résoudre l'équation.

a) *Changement de variable :*

Sur un intervalle I où y ne s'annule pas, posons $z = \dfrac{1}{y}$. Dans ce cas : $y = \dfrac{1}{z}$ et $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$.
En remplaçant dans l'équation, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$-t\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{\sin(t)}{z^2} \quad \Leftrightarrow \quad tz' + z + \sin(t) = 0$$

Ainsi, $\boxed{z \text{ est solution de } \mathcal{E}.}$

b) *Réciproque :* Considérons z une solution de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle I, ne s'annulant pas. Posons $y = \dfrac{1}{z}$; dans ce cas : $z = \dfrac{1}{y}$ et $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$ et

$$-\frac{ty'}{y^2} + \frac{1}{y} + \sin(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ty' = y + \sin(t)y^2$$

Ainsi, $\boxed{y \text{ est solution de } \mathcal{F}.}$

c) *Solution générale de $(\mathcal{F})$:*

D'après la première question, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que z est de la forme, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$z(t) = \frac{\cos(t) + K}{t} \qquad \text{c'est à dire} \qquad y(t) = \frac{t}{\cos(t) + K}$$

- si $|K| > 1$, $y(t) \neq 0$ pour tout $t \in \left]0, +\infty\right[$. La solution est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- si $|K| \leq 1$, considérons le domaine de définition de y sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\cos(t) + K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \{\pm\text{Arccos}(-K) + 2k\pi ; k \in \mathbb{N}\}$$

Une solution est donc définie sur un intervalle bornée par deux de ces valeurs consécutives ou 0.

Avant de conclure, considérons le cas où y s'annule en un point t_0. Il vient, d'après l'équation, $y'(t_0) = 0$ et donc plus concrètement, y est la fonction nulle (car si elle ne s'annulait pas sur un intervalle, elle serait du type ci-dessus).

Ainsi, les solutions sur $\left]0, +\infty\right[$ de $ty' + y + \sin(t) = 0$ sont, soit $y = 0$, soit les fonctions de la forme :

$$y(t) = \frac{t}{\cos(t) + K}$$

- lorsque $|K| > 1$, la solution est définie sur $\left]0, +\infty\right[$
- lorsque $|K| \leq 1$, la solution est définie sur $J_0 = \left]0, \text{Arccos}(-K)\right[$ ou $I_0 = \left]-\text{Arccos}(-K), 0\right[$

$$I_k = \left]\text{Arccos}(-K) + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \text{Arccos}(-K)\right[\text{ (avec } k \geq 0)$$

$$\text{ou } J_k \left]-\text{Arccos}(-K) + 2k\pi, \text{Arccos}(-K) + 2k\pi\right[\text{ (avec } k \geq 1)$$

3. **Prolongement des solutions sur $\mathbb{R}$**

Les solutions définies sur tout l'intervalle $\left]0, +\infty\right[$ sont de la forme :

$$y(t) = \frac{t}{\cos(t) + K_0}$$

avec $|K_0| > 1$.

On peut étudier de même l'équation sur $\left]-\infty, 0\right[$ et conclure que les solutions définies sur tout l'intervalle $\left]-\infty, 0\right[$ sont de la forme :

$$y(t) = \frac{t}{\cos(t) + K_1} \text{ avec } |K_1| > 1$$

- Continuité

Ces fonctions se prolongent par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$.

On peut ainsi raccorder n'importe quelle solution à gauche de 0 avec n'importe quelle solution à droite de 0 et obtenir une fonction continue en posant $y(0) = 0$.

- Dérivabilité

Considérons la dérivée ; comme $ty' = y + \sin(t)y^2$, il vient :

$$y'(t) = \frac{1}{t}\left[\frac{t}{\cos(t) + K} + \frac{t^2 \sin(t)}{\big(\cos(t) + K\big)^2}\right] = \frac{1}{\cos(t) + K} + \frac{t\sin(t)}{\big(\cos(t) + K\big)^2} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{1 + K}$$

La fonction est donc dérivable à droite de 0, de dérivée à droite : $y'_d(0) = \dfrac{1}{1 + K_0}$

et dérivable à gauche de 0, de dérivée à gauche : $y'_g(0) = \dfrac{1}{1 + K_1}$.

La fonction sera donc dérivable si et seulement si $\dfrac{1}{1 + K_0} = \dfrac{1}{1 + K_1}$, c'est à dire $K_0 = K_1$.

Ainsi, les solutions définies sur tout l'intervalle $\left]0, +\infty\right[$ sont de la forme :

$$t \mapsto \frac{t}{\cos(t) + K} \text{ avec } |K| > 1$$

et elles se prolongent de façon unique sur $\mathbb{R}$ par cette même expression.