DS 4

Mercredi 13 novembre 2024 – durée : 2 h

Exercice 1

1. a) Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2ty = \sin(t)\exp\left(t^2\right)$

   b) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = \cos(t) + t\exp(2t)$

2. On considère l'application suivante :

$$f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} + |z| \end{array} \right. .$$

   a) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

   b)(i) Déterminer l'ensemble des $w \in \mathbb{C}$ tels que l'équation $f(z) = w$ ait une et une seule solution $z \in \mathbb{C}$. On note B cet ensemble.

   (ii) Représenter la partie B dans le plan par une partie hachurée.

   c)(i) Déterminer A l'image réciproque de B par f : $A = \overset{-1}{f}(B)$.

   (ii) Représenter sur un autre plan la partie A.

   d) Que peut-on dire de l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} \right.$? Justifier.

Exercice 2

Dans tout le problème, on considère l'équation différentielle (E_0) d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivante :

$$(E_0) \ : \ y'' - y' - 2y = 0$$

Question préliminaire – Déterminer l'ensemble des solutions de (E_0). On notera $\mathcal{S}_0$ cet ensemble.

Partie A - Résolution d'une EDL2 à coefficients non constants

On souhaite résoudre l'équation différentielle d'inconnue $z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivante :

$$(E_1) \ \ z'' + (1 - e^x)z' - (e^x + 2e^{2x})z = e^x \cos(e^x).$$

On considère une fonction $z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on définit $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ par :

$$\forall t > 0, \ \ y(t) = t \times z(\ln(t)).$$

1. a) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x)$ en fonction de y et de e^x.

   b) En déduire l'expression des dérivées première et seconde de z en fonction de celles de y.

2. Montrer que z est solution de (E_1) si, et seulement si, y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de :

$$(E_2) \ : \ y'' - y' - 2y = \cos(t)$$

3. Résoudre (E_2) et en déduire les solutions de (E_1).

Partie B - Conditions initiales pour (E_0)

Dans ce qui suit, on désigne par s un nombre réel. On note φ_s l'application :

$$\varphi_s \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ y & \mapsto & \big(y(s), y'(s)\big) \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ_s est surjective et non injective.
2. On note ψ_s la restriction de φ_s à l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0).
   a) Justifier que ψ_s est bijective.
   b) Déterminer la bijection réciproque ψ_0^{-1} de ψ_0.
3. Soit y une solution de (E_0) et $\hat{y} \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{y}(x) = y(x-s).$$

   a) Justifier que $\hat{y}$ est également solution de (E_0).
   b) On note d_s l'application de $\mathcal{S}_0$ dans $\mathcal{S}_0$ qui à y associe $\hat{y}$.
   Montrer que d_s est bijective et déterminer l'application réciproque.
   c) Exprimer ψ_s^{-1} en fonction de d_s et ψ_0^{-1}.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ ainsi que la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
   b) Établir, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que $AP = PT$
   b) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n P = PT^n$.
3. On pose $B = T - \dfrac{1}{2}I$.
   a) Expliciter B puis calculer B^2.
   Donner B^k pour tout $k \geq 2$.
   b) En utilisant la formule du binôme, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{n}{2^{n-1}}B$.
   Cette formule est-elle aussi vraie pour $n = 0$?
   c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de T^n.
4. a) Justifier que P est inversible et donner P^{-1}.
   b) Déduire de ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de A^n.
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de u_n.
6. Retrouver l'expression explicite de la suite (u_n) en identifiant son type particulier.