## Proposition de corrigé du devoir surveillé 4

## Exercice 1

1. a) Résolvons l'équation différentielle : $y' - 2ty = \sin(t)\exp\left(t^2\right)$
(i) *Équation homogène*
Les solutions de l'équation homogène $y' - 2ty = 0$ sont de la forme $y(t) = K\exp(-A(t))$ où $K \in \mathbb{R}$ et $A$ est une primitive de $a(t) = -2t$. Elles sont donc de la forme :

$$y(t) = K\exp\left(t^2\right)$$

(ii) *Solution particulière*
Appliquons la méthode de variation de la constante et cherchons une fonction $K(t)$ telle que $y(t) = K(t)\exp\left(t^2\right)$ est solution de $y' - 2ty = \sin(t)\exp\left(t^2\right)$
Dérivons donc :

$$\begin{aligned} K(t) &= y(t)\exp\left(-t^2\right) \\ K'(t) &= \Big(y'(t) - 2ty(t)\Big)\exp\left(-t^2\right) = \sin(t)\exp\left(t^2\right)\exp\left(-t^2\right) = \sin(t) \end{aligned}$$

Une solution particulière est donnée par $K(t) = -\cos(t)$, c'est-à-dire $y(t) = -\cos(t)\exp(t^2)$.
Ainsi, les solutions de l'équation différentielle $y' - 2ty = \sin(t)\exp\left(t^2\right)$ sont :

$$\left\{t \mapsto \left(K - \cos(t)\right)\exp\left(t^2\right)\,;\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

b) Résolvons l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = \cos(t) + t\exp(2t)$
(i) *Équation homogène*
$y(t) = \exp(\lambda t)$ est solution de l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$ si et seulement si $\lambda$ est solution de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \text{ c'est à dire } \left(\lambda - 2\right)^2 = 0$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme : $y(t) = \left(a + bt\right)\exp(2t)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
(ii) *Second membre* $\cos(t)$
Considérons l'équation complexe $y'' - 4y' + 4y = e^{it}$. Comme $i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, nous pouvons considérer une solution particulière de la forme $y(t) = ce^{it}$ avec $c \in \mathbb{C}$. Prenant maintenant la partie réelle, nous pouvons chercher une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = \cos(t)$ sous la forme :

$$y(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$

$$y'(t) = -\alpha\sin(t) + \beta\cos(t) \text{ et } y''(t) = -\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)$$

Ainsi, $\alpha$ et $\beta$ vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(-\alpha - 4\beta + 4\alpha)\cos(t) + (-\beta + 4\alpha + 4\beta)\sin(t) = \cos(t)$$

Ceci donne, en particulier (pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$) :

$$\left\{\begin{array}{l} 3\alpha - 4\beta = 1 \\ 4\alpha + 3\beta = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{3}{25} \\ \beta = -\dfrac{4}{25} \end{array}\right.$$

Ainsi, une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = \cos(t)$ est $y(t) = \dfrac{3}{25}\cos(t) - \dfrac{4}{25}\sin(t)$.

(iii) *Second membre* $t\exp(2t)$

Comme 2 est une racine double de l'équation caractéristique et que le second membre est de la forme *polynôme-exponentielle*, nous pouvons considérer une solution particulière de la forme $y(t) = (\alpha t^3 + \beta t^2)\exp(2t)$. Il vient :

$$y'(t) = \big(2\alpha t^3 + (2\beta + 3\alpha)t^2 + 2\beta t\big)\exp(2t)$$

$$y''(t) = \big(4\alpha t^3 + (4\beta + 12\alpha)t^2 + (8\beta + 6\alpha)t + 2\beta\big)\exp(2t)$$

Par identification des quatre coefficients, $\alpha$ et $\beta$ vérifie :

$$\begin{cases} 4\alpha - 8\alpha + 4\alpha = 0 \\ 4\beta + 12\alpha - 4(2\beta + 3\alpha) + 4\beta = 0 \\ (8\beta + 6\alpha) - 8\beta = 1 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{6} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Ainsi, une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = t\exp(2t)$ est $y(t) = \dfrac{1}{6}t^3\exp(2t)$

Ainsi, d'après le principe de superposition, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$t \mapsto \underbrace{(a + bt)\exp(2t)}_{\text{équation homogène}} + \underbrace{\frac{3}{25}\cos(t) - \frac{4}{25}\sin(t)}_{\substack{\text{second membre} \\ \cos(t)}} + \underbrace{\frac{1}{6}t^3\exp(2t)}_{\substack{\text{second membre} \\ t\exp(2t)}} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

2. Étude préliminaire : soit $c + id \in \mathbb{C}$, cherchons $a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $f(a + ib) = c + id$ :

$$f(a+ib) = c + id \quad \Leftrightarrow \quad a + \sqrt{a^2 + b^2} - ib = c + id \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -d \\ a + \sqrt{a^2 + b^2} = c \quad (\bigstar) \end{cases}$$

On note que $a + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$. Si $c < 0$ alors il n'y a pas de solution.

Supposons maintenant $c \geq 0$ :

$$(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2 + d^2} = c - a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + d^2 = c^2 - 2ac + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2ac = c^2 - d^2$$

- Si $c = 0$, alors il y a une solution uniquement si $d = 0$. Dans ce cas, les solutions sont $\mathbb{R}_-$.
- Si $c \neq 0$ alors $(\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{c^2 - d^2}{2c}$.

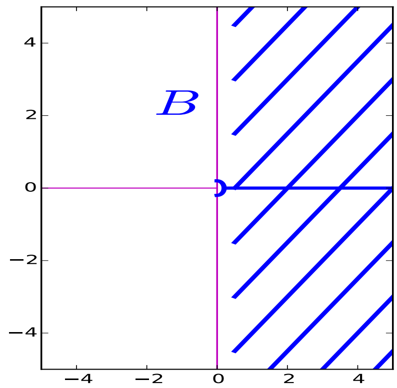
a) $\boxed{\text{L'application } f \text{ n'est pas injective}}$ car 0 possède plusieurs antécédent : $f(-1) = f(0) = 0$.

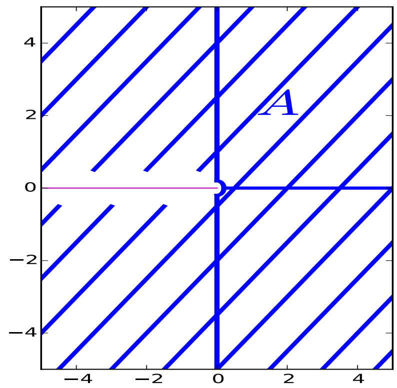
$\boxed{\text{L'application n'est pas surjective}}$ car $-1$ n'admet pas d'antécédent ; plus généralement, tous les complexe de partie réelle strictement négative et ceux de $i\mathbb{R}^*$ n'ont pas d'antécédent.

$\boxed{\text{L'application n'est pas bijective}}$ car, en particulier, elle n'est pas injective.

b)(i) L'ensemble des $w \in \mathbb{C}$ tels que l'équation $f(z) = w$ ait une et une seule solution $z \in \mathbb{C}$ est $\boxed{B = \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} = \left\{c + id ; c \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } d \in \mathbb{R}\right\}}$.

(ii) Représentations graphiques :




c)(i) D'après l'étude préliminaire $\boxed{A = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-}$.

Approche 1 : $f(\mathbb{C}) = B \cup \{0\}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}_-$ donc $f^{-1}(B) = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

Approche 2 : $A = \left\{ \dfrac{c^2 - d^2}{2c} - id;\ c \in \mathbb{R}_+^*, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Puis on montrer par double inclusion que $A = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

(ii) Voir ci-dessus.

d) $\boxed{\text{L'application } \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} \right. \text{ est bijective}}$ : injective (d'après 2a) et surjective (d'après 3a).

# Exercice 2

**Question préliminaire** – $(E_0)$ est une EDL2 homogène.
Son équation caractéristique est $(C)\ :\ r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont 2 et $-1$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-x}\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.}$

## Partie A - Résolution d'une EDL2 à coefficients non constants

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $t = e^x \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x = \ln(t)$ : comme $y(t) = t \times z(\ln t)$ alors $y(e^x) = e^x z(x)$.
Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = e^{-x} y(e^x).}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $z'(x) = -e^{-x}y(e^x) + e^{-x}e^x y'(e^x) = -e^{-x}y(e^x) + y'(e^x)$ ;
et $z''(x) = e^{-x}y(e^x) - e^{-x}e^x y'(e^x) + e^x y''(e^x) = e^{-x}y(e^x) - y'(e^x) + e^x y''(e^x)$.
Ainsi, $\boxed{z'(x) = -e^{-x}y(e^x) + y'(e^x) \quad \text{et} \quad z''(x) = e^{-x}y(e^x) - y'(e^x) + e^x y''(e^x).}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} & z''(x) + (1 - e^x)z'(x) - (e^x + 2e^{2x})z(x) \\ = \quad & e^{-x}y(e^x) - y'(e^x) + e^x y''(e^x) + (1 - e^x)\big( - e^{-x}y(e^x) + y'(e^x)\big) - (e^x + 2e^{2x})e^{-x}y(e^x) \\ = \quad & e^x y''(e^x) + (-1 + 1 - e^x)y'(e^x) + (e^{-x} - e^{-x} + 1 - 1 - 2e^x)y(e^x) \\ = \quad & e^x\big(y''(e^x) - y'(e^x) - 2y(e^x)\big) \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E_1) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ e^x\big(y''(e^x) - y'(e^x) - 2y(e^x)\big) = e^x \cos(e^x) \\ & \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y''(e^x) - y'(e^x) - 2y(e^x) = \cos(e^x) \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y''(t) - y'(t) - 2y(t) = \cos(t) \text{ car exp est bijective de } \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{z \text{ est solution de } (E_1) \text{ si et seulement si } y \text{ solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } (E_2).}$

3. $(E_0)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est l'équation homogène associée à $(E_2)$. Cherchons une solution particulière de $E_2$ comme partie réelle d'une solution particulière de :

$$(E_3) \qquad : \ y'' - y' - 2y = e^{it}$$

Comme $i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche cette solution sous la forme $y(t) = Ae^{it}$. On a alors :

$$\forall t > 0, \quad y''(t) - y'(t) - 2y(t) = -Ae^{it} - Aie^{it} - 2Ae^{it} = A(-i-3)e^{it}$$

Donc $y$ est solution de $(E_3)$ si et seulement si $A(-i-3) = 1$.
Une solution particulière de $(E_2)$ est :

$$y(t) = \text{Re}\left(\frac{1}{-i-3}e^{it}\right) = \text{Re}\left(\frac{i-3}{10}\big(\cos(t) + i\sin(t)\big)\right) = -\frac{3}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\sin(t)$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{(E_2)} = \left\{t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-t} - \frac{1}{10}\big(3\cos(t) + \sin(t)\big);\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.}$

D'après A1c), on pose $t = e^x$ avec $z \in \mathcal{S}_{(E_1)}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = e^{-x}y(e^x)$ avec $y \in \mathcal{S}_{E_2}$ :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_1)} = \left\{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-x+2e^x} + \mu e^{-x-e^x} - \frac{e^{-x}}{10}\big(3\cos(e^x) + \sin(e^x)\big);\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}}$$

## Partie B - Conditions initiales pour $(E_0)$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y : x \mapsto a + b(x - s)$ ; alors $y(s) = a$ et $y'(s) = b$ donc $\varphi_s(y) = (a, b)$. Donc tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ admet au moins un antécédent par $\varphi_s$ et donc $\varphi_s$ est surjective..
De plus $\varphi_s(x \mapsto 0) = (0, 0)$ et $\varphi_s(x \mapsto (x-s)^2) = (0, 0)$ donc $\varphi_s$ n'est pas injective.
Ainsi, $\boxed{\text{l'application } \varphi_s \text{ est surjective et non injective.}}$

2. a) $(E_0)$ est une EDL2 homogène à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$. Chercher un antécédent de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par $\psi_s$ revient à résoudre le problème de Cauchy $(y(s) = a, y'(s) = b)$, donc il existe une et une seule solution $y$ de $(E_0)$ satisfaisant les conditions initiales $y(s) = a$ et $y'(s) = b$.
Ainsi, $\boxed{\psi_s \text{ est bijective.}}$

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche la solution $y$ de $(E_0)$ satisfaisant les conditions initiales $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.
On cherche donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-x}$ et

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= a \\ 2\lambda - \mu &= b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda - b &= a \\ \mu &= 2\lambda - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \dfrac{a+b}{3} \\ \mu &= \dfrac{2a-b}{3} \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\psi_0^{-1} \text{ associe à } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ la fonction } x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{a+b}{3}e^{2x} + \frac{2a-b}{3}e^{-x}.}$

3. a) $\hat{y}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{y}'(x) = y'(x-s)$ et $\hat{y}''(x) = y''(x-s)$.
Donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\hat{y}''(x) - \hat{y}'(x) - 2\hat{y}(x) = y''(x-s) - y'(x-s) - 2y(x-s) = 0$ car $y$ est solution de $(E_0)$.
Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } \hat{y} \text{ est solution de } (E_0).}$

b) Montrons que $d_{-s} \circ d_s = d_s \circ d_{-s} = \text{Id}_{\mathcal{S}_0}$ avec $d_u : f \mapsto \big(x \mapsto f(x-u)\big)$.
Soit $y \in \mathcal{S}_0$ et $x \in \mathbb{R}$ :

$$(d_{-s} \circ d_s)(y)(x) = d_{-s}\big(d_s(y(x))\big) = d_{-s}\big(y(x-s)\big) = y(x - s - (-s)) = y(x)$$

De même en remplaçant $s$ par $-s$, on a $d_s \circ d_{-s} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_0}$.

Ainsi, $\boxed{d_s \text{ est bijective et } (d_s)^{-1} = d_{-s}.}$

c) Soit $y \in \mathcal{S}_0$. Notons $\tilde{y} = d_{-s}(y)$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{y}(x) = y(x+s)$.

$$\psi_s(y) = \big(y(s), y'(s)\big) = \big(\tilde{y}(0), \tilde{y}'(0)\big) = \psi_0(\tilde{y}) = \psi_0\big(d_{-s}(y)\big)$$

Donc $\psi_s = \psi_0 \circ d_{-s}$ et $\psi_s^{-1} = (\psi_0 \circ d_{-s})^{-1} = (d_{-s})^{-1} \circ \psi_0^{-1}$.

Ainsi, $\boxed{\psi_s^{-1} = d_s \circ \psi_0^{-1}.}$

# Exercice 3

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $AU_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n.}$

b) • <u>Initialisation :</u> pour $n = 0$, $A^0U_0 = IU_0 = U_0$. La relation est vraie au rang 0.

• <u>Hérédité :</u> Considérons $n \geq 0$ et supposons $U_n = A^nU_0$.

$$U_{n+1} = AU_n = AA^nU_0 = A^{n+1}U_0$$

La relation est vérifiée au rang $n+1$.

• <u>Conclusion :</u> $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^nU_0.}$

2. a) Le premier produit donne : $AP = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le calcul du coefficient (2,1) est : $1 \times 1 + 0 \times 2 = 1$.

Le second produit donne : $PT = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{AP = PT}$.

b) Montrons par récurrence sur $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) : A^nP = PT^n$.

• <u>Initialisation :</u> pour $n = 0$, $A^0P = IP = P$ et $PT^0 = PI = P$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.

• <u>Hérédité :</u> Considérons $n \geq 0$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$A^{n+1}P = A^nAP =_{\text{d'après 2a)}} A^nPT =_{\text{d'après l'HR}} PT^nT = PT^{n+1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

• <u>Conclusion :</u> $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^nP = PT^n.}$

3. a) Par opération sur les matrices : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Ainsi, $\boxed{\forall k \geq 2,\ B^k = B^2B^{k-2} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}}$

b) On sait que $T = \dfrac{1}{2}I + B$ et que $I$ et $B$ commutent. La <u>formule du binôme</u> donne pour $n \geq 1$ :

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \left(\frac{1}{2}I\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{0}I + \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{1}B + \underbrace{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}}_{\text{pour } k \geq 2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{n}{2^{n-1}}B.}$

De plus, $\dfrac{1}{2^0}I + \dfrac{0}{2^{-1}}B = I$ et $T^0 = I$. La formule ci-dessus est valide pour $n = 0$.

c) Il vient, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

4. a) La matrice $P$ est de taille 2 ; elle est inversible si et seulement si $1 \times 0 - 2 \times 2 = -4 \neq 0$.

Ainsi, $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

**Attention !** Ces résultats sur les matrices de taille 2 sont dans le cours et sont à connaître.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, multipliant la relation du 2b) par $P^{-1}$ à droite, on obtient $A^n = PT^nP^{-1}$ :

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{4}\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2^{n+2}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4n & 2(n-1) \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2^{n+2}}\begin{pmatrix} -4(n+1) & 2n \\ -8n & 4(n-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} 2(n+1) & -n \\ 4n & -2(n-1) \end{pmatrix}}$

5. D'après 1b), pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n U_0 = \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} 2(n+1) & -n \\ 4n & -2(n-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2^{n+1}}\big(8n - 2(n-1)\big) = \frac{3n+1}{2^n}.}$

6. La suite $(u_n)$ est vérifie une <u>relation de récurrence linéaire d'ordre 2</u>.

- l'équation caractéristique est : $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$
- le discriminant est : $\Delta = 1 - \frac{4}{4} = 0$
- il y a une racine réelle double : $r_0 = \frac{1}{2}$
- il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \big(\alpha + \beta n\big)r_0^n$
- recherche de $\alpha$ et $\beta$ grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha = 1 \\ u_1 = (\alpha + \beta)\,\frac{1}{2} = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 - \alpha = 3 \end{cases}$$

Ainsi, on retrouve bien la relation du 5) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1+3n}{2^n}.}$