Corrigé du DM 7

Partie A – Convergence des quatre suites

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} - s_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

b) Soit $k \geq 2$, alors $k-1 \leq t \leq k \quad \Rightarrow \quad t^2 \leq k^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{t^2} \geq \dfrac{1}{k^2}$.
Par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}(k-(k-1)) = \frac{1}{k^2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \geq 2,\ \dfrac{1}{k^2} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.}$

Il vient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par somme d'inégalité :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \left[-\frac{1}{t}\right]_{k-1}^{k} = \sum_{k=2}^{n} -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}$$

Par simplification téléscopique de la somme, il vient : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$ et donc $s_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ s_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}.}$

c) On en déduit que la suite (s_n) est majorée par 2 et croissante ; ainsi, par limite monotone, $\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4}s_n$
- $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = s_{2n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = s_{2n+1} - u_n$
- $w_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{impair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{pair}}}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2j+1)^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j)^2} = v_{n-1} - u_n$
- $w_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{impair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{pair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(2j+1)^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j)^2} = v_n - u_n$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{4}s_n, \quad v_n = s_{2n+1} - u_n, \quad w_{2n} = v_{n-1} - u_n \text{ et } w_{2n+1} = v_n - u_n.}$

b) Par opération sur les limites,

- $u_n \to \dfrac{S}{4}$, donc $\boxed{U = \dfrac{S}{4} = \dfrac{\pi^2}{24}}$;
- $v_n \to S - U$, donc $\boxed{V = \dfrac{3S}{4} = \dfrac{\pi^2}{8}}$;
- $w_{2n} \to V - U = S - 2U = S - \dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{2}S = \dfrac{\pi^2}{12}$ et $w_{2n+1} \to V - U$.

Donc, (d'après l'indication) $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ converge vers } W = \dfrac{1}{2}S = \dfrac{\pi^2}{12}.}$

Partie B – Calcul de Zeta(2)

3. Méthode 1 : procéder par récurrence

- Initialisation : pour $n = 1$ et $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ alors la formule $\sin(a) = \sin(b) + 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ donne

$$D_1(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos(x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- Hérédité : soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On suppose que $D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

$$\begin{aligned} D_{n+1}(x) = &\ D_n(x) + \cos\left((n+1)x\right) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos\left((n+1)x\right) \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left((n+1)x\right)\right) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.}$

Méthode 2 : procéder par le calcul dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{ikx}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

4. a) Soit $k \geq 1$, $x \mapsto x, x \mapsto \cos(kx) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, par intégration par parties il vient

$$\int_0^\pi x\cos(kx)\mathrm{d}x = \left[\frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{x\sin(kx)}{k}\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^\pi = \frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{1}{k^2} = \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}$$

Ainsi, $\boxed{\forall k \geq 1, \int_0^\pi x\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}.}$

b) Soit $n \geq 1$, par linéarité de l'intégrale,

$$L_n = \int_0^\pi xD_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1}{2}x\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi x\cos(kx)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^\pi + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}$$

Ainsi, $\boxed{L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k^2}.}$

5. On définit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0,\pi] \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

$x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $x \mapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ne s'y annule pas.
Par quotient, $x \mapsto \dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$.

Étude du raccord en 0 :

- Continuité : $\dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2 = f(0)$
- Dérivabilité : $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 2}{x} = -\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{x}{2}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^3}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -0 \times \left(-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{3} = 0 \in \mathbb{R}$$
- Continuité de la dérivée : pour $x \in]0, \pi]$

$$f'(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{x}{2}\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^3}\frac{\frac{x}{2}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\times\frac{1}{3}\times 1^2 = 0 = f'(0)$$

Remarque : une autre approche est d'établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et de montrer que f admet un DL_1 en 0.

$$\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{0}{=} \frac{x}{\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)} \underset{0}{=} \frac{2}{1 - \frac{x^2}{24} + o(x^2)} \underset{0}{=} 2 + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \underset{0}{=} 2 + o(x)$$

On note que le raccord de continuité est valide et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \pi].}$

6. Comme φ et $x \mapsto -\dfrac{\cos(\lambda x)}{\lambda}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ alors par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^\pi \varphi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\varphi(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Par double inégalités triangulaires :

$$\left|\int_0^\pi \varphi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\frac{\cos(\lambda\pi)}{\lambda}\varphi(\pi)\right| + \left|\frac{\varphi(0)}{\lambda}\right| + \int_0^\pi \left|\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\varphi'(x)\right|\mathrm{d}x$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_0^\pi \varphi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(|\varphi(\pi)| + |\varphi(0)| + \int_0^\pi |\varphi'(x)|\mathrm{d}x\right)$$

Or le membre de droite tend vers 0 lorsque $\lambda \to +\infty$ donc par encadrement, $\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi \varphi(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x = 0.}$

7. a) On note que $L_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x$.
Considérant $\lambda = n + \frac{1}{2} \to +\infty$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, alors d'après 4), $\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = 0.}$

b) D'après 4b), par opération algébrique et par unicité de la limite, il vient :

$$0 = \frac{\pi^2}{4} - S - W = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3S}{2} \quad \text{et donc } S = \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi, $\boxed{S = \frac{\pi^2}{6},\ U = \frac{S}{4} = \frac{\pi^2}{24},\ V = \frac{3S}{4} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } W = \frac{S}{2} = \frac{\pi^2}{12}.}$