Corrigé du DM 8

Étude asymptotique

Partie A – Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0 = a > 0$. La suite est strictement positive.
La relation précédente devient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite est strictement positive et strictement croissante.}}$

2. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors elle admet une limite soit finie, soit $+\infty$.
Montrons par l'absurde que la limite est infinie :

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
On a : $u_n \to \ell$, $u_{n+1} \to \ell$, $u_n^2 \to \ell^2$
Les opérations algébriques et l'unicité de la limite donne :

$$\ell = \ell + \ell^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 0$$

Or, pour tout n, $u_n \geq a > 0$, par passage à la limite on a $\ell \geq a > 0$ ce qui est contradictoire.

Ainsi, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge et tend vers } +\infty.}$

Partie B – Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(u_n + u_n^2\right) - \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(u_n^2\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_n + u_n^2}{u_n^2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons : $v_{n+p+1} - v_{n+p} = \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_{n+p}}\right)$
Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

$$\begin{aligned} 0 < u_n \leq u_{n+p} \quad &\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{u_{n+p}} \leq \frac{1}{u_n} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante} \\ &\Rightarrow \quad 1 < 1 + \frac{1}{u_{n+p}} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \\ &\Rightarrow \quad 0 < \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \text{ car ln est croissante} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \text{ et } 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)}$$

4. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. Introduisons une somme téléscopique :

$$v_{n+k+1} - v_n = (v_{n+k+1} - v_{n+k}) + (v_{n+k} - v_{n+k-1}) + \cdots + (v_{n+1} - v_n) = \sum_{i=0}^{k} (v_{n+i+1} - v_{n+i})$$

Or, pour tout $i \geq 0$, nous avons démontré :

$$0 < v_{n+i+1} - v_{n+i} \leq \frac{1}{2^{n+i+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Par sommation pour $i \in [\![0, k]\!]$:

$$\begin{aligned}
0 < v_{n+k+1} - v_n &\leq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^{n+i+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\
&\leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k, n \in \mathbb{N},\ 0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)}$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 0$ et $k = p - 1$, nous en déduisons

$$0 < v_p - v_0 \leq \frac{1}{2^0} \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$$

C'est à dire :

$$v_p \leq v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par $v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$.

⇛ *On rappelle que la majoration doit être indépendante de l'indice.*

De plus, pour tout n entier et $k = 0$: $0 < v_{n+1} - v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'après le théorème de limite monotone, $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.

6. Le théorème de limite monotone donne aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq \alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons : $\dfrac{1}{2^n} \ln(u_n) \leq \alpha \Rightarrow \ln(u_n) \leq \alpha 2^n$.

Or exp est croissante d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n).}$

➢ Soient $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier k, nous savons que d'après la question B4) :

$$v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

Par passage à la limite sur $k \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \quad &\Rightarrow \quad \alpha \leq v_n + \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n} \ln(u_n) + \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \\
&\Rightarrow \quad 2^n \alpha \leq \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \ln(u_n + 1) \\
&\Rightarrow \quad \exp(2^n \alpha) \leq u_n + 1 \text{ car exp estcroissante.}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1}$

➢ Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons démontré :

$$u_n \leq \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$$

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et tend vers $+\infty$ d'après la partie A, ainsi :

$$1 \leq \frac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$$

et $\dfrac{1}{u_n} \to 0$, donc d'après le <u>théorème d'encadrement</u> : $\dfrac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} \to 1$

Ainsi, $\boxed{\exp(\alpha 2^n) \underset{+\infty}{\sim} u_n}$

7. D'après la question B6), nous avons

$$u_n \leq \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \beta_n \leq 1$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)\exp(-\alpha 2^n) &= \Big[\exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - u_{n+1} + (\exp(\alpha 2^n) - u_n)^2 \\
&\qquad - (\exp(\alpha 2^n) - u_n)\Big]\exp(-\alpha 2^n) \\
&= \Big[\exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - u_n - u_n^2 + \exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - 2\exp(\alpha 2^n)\, u_n \\
&\qquad + u_n^2 - \exp(\alpha 2^n) + u_n\Big]\exp(-\alpha 2^n) \\
&= \Big[2\exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - 2\exp(\alpha 2^n)\, u_n - \exp(\alpha 2^n)\Big]\exp(-\alpha 2^n) \\
&= 2\exp(\alpha 2^n) - 2u_n - 1 = 2\beta_n - 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\beta_n - 1 = \left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)\exp(-\alpha 2^n)}$$

8. La suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $\left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)$ est également bornée. Or $\exp(-\alpha 2^n) \to 0$. Comme le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle est une suite de limite nulle, nous obtenons

$$2\beta_n - 1 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta_n - 1 = o(1) \quad \Leftrightarrow \quad \beta_n = \frac{1}{2} + o(1)$$

Par définition de la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$, nous avons :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \exp(\alpha 2^n) - \frac{1}{2} + o(1)$$