DM 8

à rendre le mardi 8 décembre 2024

Étude asymptotique

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2 \\ u_0 = a, \quad a \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Partie A – Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

Partie B – Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$

3. Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

4. En déduire que quels que soient les entiers naturels k et n

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

5. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α.
6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$$

En passant à la limite pour n fixé et $k \to +\infty$ dans l'encadrement de la question B4), montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$$

En déduire, lorsque n tend vers l'infini :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$$

7. On définit pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$.
Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$2\beta_n - 1 = \left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)\exp(-\alpha 2^n)$$

8. Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \exp(\alpha 2^n) - \frac{1}{2} + o(1)$$